



СУЧАСНИЙ УНІВЕРСИТЕТСЬКИЙ  
ПІДРУЧНИК

В. М. СИНЕГЛАЗОВ  
А. М. СІЛЬВЕРСТОВ

# ТЕОРІЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний авіаційний університет

В. М. Синєглазов, А. М. Сільвестров

## ТЕОРІЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

*Затверджено Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України як підручник для студентів  
вищих авіаційних навчальних закладів, які навчаються  
за напрямом підготовки  
«Автоматизація та ком'ютерно-інтегровані технології»*

Київ 2015

## Зміст

Вступ.....	3
Розділ 1. Системний підхід до задачі ідентифікації.....	5
1.1. Визначення системи.....	5
1.2. Багаторівнева декомпозиція систем.....	13
1.3. Принципи узгодженості критеріїв.....	24
1.4. Композиція підсистем різних рівнів в єдину систему ...	35
<i>Контрольні запитання</i> .....	42
<i>Література</i> .....	43
Розділ 2. Математичні моделі змінних стану об'єкта ідентифікації .....	45
2.1. Моделі змінних, як стаціонарні випадкові процеси .....	45
2.1.1. Основні поняття.....	45
2.1.2. Кореляційні функції змінних стану.....	47
2.2. Визначення спектрів сигналів .....	55
2.2.1. Визначення спектрів за допомогою кореляційних функцій.....	55
2.2.2. Визначення спектрів сигналів через перетворення Фур'є .....	63
2.2.3. Взаємна спектральна щільність за наявності запізнення в об'єкті.....	65
2.3. Ергодичні і гаусові випадкові процеси, як моделі змінних стану .....	68
2.3.1. Достатні умови ергодичності процесів.....	71
2.3.2. Змінні стану, що описуються гаусовими випадковими процесами.....	72
2.4. Похідні випадкових процесів.....	75
2.4.1. Кореляційні функції.....	76
<i>Контрольні запитання</i> .....	77
<i>Література</i> .....	78
Розділ 3. Ідентифікація (оцінювання) змінних стану об'єкта.....	79
3.1. Задача оцінювання стану.....	79
3.2. Оцінювання стану лінійних систем.....	80
3.2.1. Спостережуваність.....	82

3.3. Оптимальне оцінювання стану.....	85
3.3.1. Оцінювання за дискретними даними.....	90
3.4. Оцінювання стану нелінійних систем.....	92
3.4.1. Спостережуваність нелінійних систем.....	92
3.4.2. Оптимальне нелінійне згладжування.....	96
3.5. Оцінювання стану систем з розподіленими параметрами.....	103
3.5.1. Спостережуваність для СРП.....	103
3.5.2. Оцінювання станів.....	105
Запитання.....	107
Література.....	107
Розділ 4. Моделі множинної регресії та їх ідентифікація методом найменших квадратів.....	109
4.1. Загальний запис множинної лінійної регресії.....	109
4.2. Емпірична модель.....	110
4.3. МНК- оцінювання вектора $\beta$ .....	112
4.4. Числові характеристики МНК-оцінок та емпіричної функції регресії.....	114
4.5. Теорема Гаусса-Маркова для множинної регресії.....	119
4.6. Визначення точкової незміщеної оцінки для $\sigma_\varepsilon^2$ випадкових відхилень $\varepsilon_i$ .....	122
4.7. Незалежність статистичних оцінок $\hat{\beta}^*$ і $S_\varepsilon^2$ .....	124
4.8. Коефіцієнт детермінації.....	125
4.9. Закони розподілу оцінок $\beta_i^* (i = \overline{0, m})$ емпіричної регресії.....	126
4.10. Довірчі інтервали теоретичної множинної лінійної регресії її параметрів $\beta_i$ .....	129
4.11.Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії.....	131
4.12. Перевірка загальної якості множинної лінійної регресії.....	132
Запитання.....	143
Література.....	143
Розділ 5. Баєсівське оцінювання регресійних моделей і його редукція до МНК-оцінювання.....	145



5.1. Статистичні критерії оптимальності.....	145
5.2. Методи оцінювання вектора $\beta$ лінійних моделей.....	148
5.3. Загальний алгоритм нелінійного оцінювання параметрів.....	160
5.4. Оптимізація параметрів алгоритму ідентифікації за умови мінімуму середніх втрат при керуванні динамічним об'єктом.....	173
Запитання.....	181
Література.....	181
Розділ 6. Оцінювання параметрів регресійних моделей за неточними вхідними і вихідними сигналами об'єкта.....	183
6.1. МНК в ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів.....	183
6.2. Узагальнений МНК та його параметрична реалізація.....	186
6.3. Інтегрований МНК.....	189
6.3.1. Загальні положення.....	189
6.3.2. Аналіз складових метода.....	191
6.3.3. Зміщення оцінки.....	196
6.3.4. Рекурентна форма обчислення.....	199
6.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК.....	201
6.4. Метод адаптивного одноразового ділення (МОД).....	202
6.4.1. Сутність методу.....	202
6.4.2. Зміщення оцінок.....	203
6.4.3. Коваріація оцінок.....	204
6.5. Метод прогнозу кореляції (МПК).....	205
6.6. Приклад побудови прогнозних моделей системою ідентифікації типу БАСІ.....	207
Запитання.....	217
Література.....	217
Розділ 7. Дискретні моделі динамічних систем та їх ідентифікація.....	218
7.1. Загальні положення.....	218
7.1.1. Решітчасті функції та скінчені різниці.....	218
7.1.2. Перетворення Лапласа решітчастих функцій та $z$ – перетворення.....	221
7.2. Математична модель системи з мікропроцесором.....	225
7.2.1. Мікропроцесор як дискретна система.....	225
7.2.2. Система «об'єкт – цифровий регулятор».....	227

7.3. Дискретні стохастичні моделі.....	231
7.4. Математичні моделі на базі матричних операторів.....	236
7.4.1. Лінійні системи.....	236
7.4.2. Нелінійні системи.....	244
7.5. Апроксимація нелінійної системи ортогональними поліномами.....	250
7.6. Параметрична ідентифікація дискретних моделей об'єктів різними методами.....	258
7.6.1. Ідентифікація дискретних моделей методом найменших квадратів.....	258
7.6.2. Ідентифікація методом допоміжних змінних.....	261
7.6.3. Ідентифікація дискретних моделей методом максимальної правдоподібності.....	263
7.6.4. Ідентифікація дискретних моделей методом стохастичної апроксимації.....	265
7.6.5. Порівняння характеристик рекурентних методів ідентифікації.....	267
Запитання.....	274
Література.....	275
Розділ 8. Неперервні моделі динамічних систем.....	276
8.1. Моделі, побудовані на основі законів механіки.....	276
8.2. Моделі, побудовані на основі законів електромеханіки.....	282
8.2.1. Передаточна функція ДПС, як виконавчого елемента в системах бортової автоматики ЛА.....	282
8.2.2. Передаточна функція гідравлічного приводу рульових машинок ЛА.....	286
8.3. Моделі у вигляді структурних схем об'єктів ідентифікації та систем управління ними.....	288
8.4. Спрощення передавальних функцій.....	303
8.5. Моделі у змінних стану.....	306
8.5.1. Змінні стану.....	306
8.6. Часові характеристики і перехідна матриця стану.....	314
8.7. Моделі об'єктів з розподіленими параметрами та їх ідентифікація.....	323
8.7.1. Моделювання об'єктів з розподіленими параметрами.....	323

8.7.2. Класифікація математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами.....	327
Запитання.....	343
Література.....	345
Розділ 9. Методи ідентифікації динамічних об'єктів .....	346
9.1. “Of-line” – ідентифікація динамічних об'єктів.....	346
9.1.1. Активна ідентифікація динамічних об'єктів.....	346
9.1.2. Визначення імпульсної перехідної функції кореляційним методом.....	347
9.1.3. Псевдовипадкові двійкові послідовності максимальної довжини.....	353
9.1.4. Отримання непараметричних оцінок перехідної функції і АФЦХ в режимі активної ідентифікації.....	363
9.1.5. Визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передаточні функції.....	365
9.2. Методи “online” – ідентифікації передаточних функцій об'єктів.....	375
9.2.1. Ортогональні моделі.....	375
9.2.2. Градієнтний метод з паралельною моделлю.....	378
9.2.3. Градієнтний метод з послідовно-паралельною моделлю.....	380
9.2.4. Метод трьох моделей.....	384
9.2.5. Ноніусні моделі.....	392
9.3. Комплексування методів і моделей.....	396
Запитання.....	404
Література.....	405
Розділ 10. Двоступенева ідентифікація аеродинамічних коефіцієнтів моделі повздовжнього коротко-періодичного руху літаків.....	406
10.1. Математичні моделі повздовжнього руху.....	406
10.2. Характеристики стійкості і керованості та їх оцінки по лінеаризованим рівнянням сили $Y$ і моменту $M_{z_1}$ .....	413
10.3. Критерії динамічної стійкості і керованості.....	431
10.4. Незміщене оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки ЛА.....	434
10.5. Ідентифікація гладкої нелінійної статистичної складової динамічних моделей (балансировочні	

залежності літака).....	447
10.6. Структурно-параметрична ідентифікація багатомірних нелінійних залежностей за експериментальними даними.....	452
Запитання.....	456
Література.....	456
Розділ 11. Адаптивна активна ідентифікація математичної моделі бокового руху ЛА.....	458
11.1. Структурна схема бортової системи адаптивного оптимального управління льотними випробуваннями на стійкість і керованість.....	458
11.2. Математичні моделі збуреного руху ЛА та їх декомпозиція.....	461
11.3. Синтез тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі бокового руху ЛА.....	464
11.4. Корекція критеріїв якості експерименту.....	466
11.5. Уточнення оцінок коефіцієнтів моделі бокового руху ЛА.....	468
Запитання.....	470
Література.....	471
Додаток 1. Таблиці статистичних розподілів.....	472
Зміст.....	477

## Розділ 1. Системний підхід до задачі ідентифікації

### 1.1 Визначення системи

Початковим кроком вирішення задачі ідентифікації є етап формалізації. На цьому етапі повинна бути поставлена задача. Постановка полягає у відображенні невизначеної ситуації, що пов'язана з реальним об'єктом, у формалізовану задачу, визначену на множині кількісно порівнянних елементів. Такими елементами є система, процеси, що в ній протікають, критерії (цілі) і стратегії їх оптимізації (досягнення цілей).

Загальне математичне визначення системи дано Р. Калманом, де з урахуванням умов фізичної реалізованості наведено визначення стаціонарної, дискретної, безперервної, зкінченномірної, лінійної, гладкої і динамічної систем з точки зору їх зовнішньої поведінки; визначено необхідні умови існування математичних моделей. Для гладких систем доведено теорему про те, що перехідна функція стану, тобто відображення виду

$$T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$$

водночас є рішенням диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (1.1)$$

де  $x \in X$ ,  $u(t) = \omega(t) \in \Omega; t \in T$ ;  $T$  - впорядкована множина моментів часу  $\Omega$ ,  $X$  — множин вхідних впливів і змінних стану.

Стан системи - це та мінімальна інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутньої поведінки (тобто вихідних змінних) системи, якщо поведінка її вхідних змінних відома, починаючи з поточного часу  $t_0$ .

Якщо множина  $X$  належить зкінченномірному простору, то модель (1.1) являє собою зкінченномірну систему нелінійних нестационарних диференціальних рівнянь першого порядку. З системи (1.1) за певних припущень можуть бути отримані системи лінійних і (або) стаціонарних рівнянь, дискретна система також лінійна і (або) стаціонарна. Чим вужча область визначення змінних  $\{X, \Omega, T\}$ , тим ближче в просторі  $X$  буде спрощена модель (1.2) до повної (1.1). Для гладкої системи (1.1), має місце існування таких



$X_1 \subset X$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega$ ,  $T_1 \subset T$ , що (з точністю до наперед заданої малої  $\varepsilon$ ) системі (1.1) буде еквівалентна система лінійних диференціальних рівнянь з матрицями  $A$  і  $B$  постійних коефіцієнтів:

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t); \quad y_1(t) = Cx_1(t), \quad (1.2)$$

де  $x_i(t)$  - вектор-функція  $\{x_i(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $u_1(t)$  - вектор-функція  $\{u_j(t)\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $\dot{x}_1(t)$  - вектор-функція похідних  $\{\dot{x}_{1i}(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $y_1(t)$  - вектор-функція вимірювань  $\{y_i(t)\}$ ,  $i = \overline{1, r}$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  - матриці розміру  $(n \times n)$ ,  $(n \times m)$ ,  $(r \times n)$  відповідно.

Структура і рангові властивості матриць  $A$ ,  $B$ ,  $C$  визначають умови *керованості*, *спостережуваності* і *ідентифікаційності* системи (1.2) [2,3].

*Критерій оптимізації або мета*, поставлена системою більш високого рівня ієрархії, може мати "розмитий" характер. Однак у багатьох випадках формалізація критерію (цілі) досягається шляхом завдання функціонала, який однозначно визначає ефективність поведінки системи. Мета системи - забезпечення екстремального значення цього функціоналу. Під функціоналом розуміють відображення

$$T \times T \times X \times \Omega \rightarrow R,$$

де  $R$  - множина дійсних чисел.

Системі (1.1) для фіксованих початкових  $t_0 \in T$  і кінцевих  $t_1 \in T$  моментів часу, станів  $x_0 \in X$ ,  $x_1 \in X$ , поведінки системи  $x(t)$ , викликаній не нульовими початковими умовами та керуючим впливом  $u(t)$ , відповідає конкретне дійсне число  $I \in R$ .

Управління  $u^*(t)$  оптимальне, якщо число  $I$  з урахуванням початкових умов, рівняння (1.1) та інших обмежень на  $x(t)$  і  $u(t)$  приймає екстремальне (мінімальне або максимальне) значення  $I^* \in R$ .

Для знаходження оптимальної стратегії управління  $u^*(t)$  реальним об'єктом необхідна його модель (1.1), тобто вид і параметри функціонального відображення  $f$ . *Визначення відображення  $f$  в (1.1) за результатами вимірів  $x(t)$ ,  $u(t)$  є задачею ідентифікації*. Оптимальність моделі  $\hat{f}$  відображення  $f$  оцінюється критерієм якості ідентифікації  $J$ , який також є функціоналом, що відображає множини реалізацій або конкретні

реалізації  $x(t)$  і  $x_M(t)$  в дійсне число  $J$ , де  $x_M(t)$  є рішенням рівняння моделі

$$\frac{dx_M}{dt} = \hat{f}(t, x_M, u) \quad (1.3)$$

для спільної з об'єктом вхідної дії  $u(t)$ .

Так як в загальному випадку  $\hat{f} \neq f$ , то значення  $\hat{I}^*$  отримане при керуючому впливі на об'єкт  $u(t)$ , для моделі (1.3), буде гірше істинного оптимального значення  $I^*$ .

Модель (1.3), побудовану з урахуванням не тільки функціонала  $J$ , але і  $I$ , називають *цілеорієнтованою* [4].

Якщо на множині  $\{f_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) допустимих відображень відображення  $\hat{f}$  (1.3) для фіксованого управління  $u(t)$  дає екстремальне значення  $\hat{I}^*$ , тобто

$$\hat{f} = \arg \underset{f_i \in \{f_i\}}{\text{extr}} I,$$

то таку модель називають *цілеорієнтованою оптимальною*.

Близькість моделі до *цілеорієнтованої* оптимальної визначається близькістю вимірюваних змінних  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{u}(t)$  до дійсних змінних  $x(t)$  і  $u(t)$  реального об'єкта. При вирішенні задачі ідентифікації в (1.3) і в  $J(x, x_M)$  підставляють не  $x(t)$  і  $u(t)$ , а їх оцінки  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{u}(t)$ , формування яких є задачею ідентифікації сигналів об'єкта. Оцінки  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{u}(t)$  сигналів  $x(t)$  і  $u(t)$  в (1.1) отримують за допомогою фільтрів  $f_\Phi$ :

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = f_\Phi(t, \hat{z}, z), \quad (1.4)$$

де  $z(t)$  - вектор-функція вимірюваних первинними перетворювачами сигналів  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$ ,  $N_x$ ,  $N_u$  - похибки вимірювання  $x$  і  $u$  відповідно.

Оптимальність фільтрів (1.4) оцінюється критерієм якості фільтрації  $J_\Phi$  - функціоналом від сигналів  $z, \hat{z}$  або їх спектральних характеристик.

Так як  $f_\Phi$  не дає ідеального перетворення  $z$  в  $(x, u)$ , то від критерію  $J_\Phi$  в задачі ідентифікації сигналів  $\hat{z}, z$  буде залежати

значення критерію  $J$  в задачі ідентифікації відображення  $\hat{f}$  в (1.3), від якого у свою чергу залежить значення критерію  $I$  якості управління реальним об'єктом. Так само як і для моделі (1.3), для фільтра (1.4) введемо поняття цілеорієнтованності та оптимальності. Фільтр (1.4) цілеорієнтований, якщо при його побудові певним чином бралася до уваги задача ідентифікації  $\hat{f}$  в (1.3). Якщо на множині допустимих відображень  $\{f_{\phi i}\}$  відображення  $f_{\phi}$  в (1.4) при фіксованому  $\hat{f}$  забезпечує екстремальне значення  $J^*$ , тобто

$$f_{\hat{o}} = \arg \underset{f_{\hat{o}i} \in \{f_{\phi i}\}}{\text{extr}} J,$$

то фільтр (1.4) буде *цілеорієтованим оптимальним*.

Оптимізація функціоналів  $I$ ,  $J$ ,  $J_{\phi}$  пов'язана з поняттям *релаксаційного процесу* [4]. Множина  $\{Q_k\}$ ,  $k \geq 0$ , кожен елемент якої належить деякій (зазвичай опуклій) області  $G$  нормованого простору, називають *релаксаційним процесом* (РП) щодо оптимізуємої функції  $F(Q_k)$ , якщо послідовність  $F(Q_k)$ , для упорядкованого за значенням  $k$  також впорядкована. Так, в задачі мінімізації послідовність  $F(Q_k)$  така, що  $F(Q_0) \geq F(Q_1) \geq F(Q_2) \geq \dots$ . РП збігається за функціоналом, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F(Q_k) - F(Q^*)) = 0,$$

і просто збігається, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = Q^*,$$

де  $Q^*$  - істинне значення.

Визначення РП спробуємо розширити на випадок, якщо елементи  $Q_k$  належать області  $G$  простору, в якому не задано поняття норми або відстані, знак  $\geq$  розуміється як символ відношення порядку. Так, наприклад, в задачі ідентифікації при введенні підмножини структур  $\Sigma$  моделей і множин методів *Opt* оцінювання вектора  $\beta$  параметрів моделі  $(\Sigma, \beta)$  РП не є строго релаксаційним. Множину  $\{Q_k\}$ ,  $k \geq 0$ , назвемо РП щодо  $F(Q_k)$ , якщо для будь-якого  $k > 0$ , існує таке значення  $j > 0$ , що  $F_{k+j} \leq F_k$ . Такий РП не є, чітко кажучи, релаксаційним, і

збіжність його за функціоналом  $F$  або за  $Q_k$  залежить від розмірності і впорядкованості підмножини ненормованих елементів (у нашому випадку це  $\{\Sigma, \text{Opt}\}$ ).

*Системою ідентифікації в загальному вигляді* будемо називати прямий добуток підмножин  $\{\Sigma, \beta\}$ ,  $\{\text{Opt}, \alpha\}$ ,  $\{J\}$ ,  $\{I\}$ ,  $\{T\}$ , що позначається як  $\{\Sigma, \beta\}$ ,  $\{\text{Opt}, \alpha\}$ ,  $\{J\}$ ,  $\{I\}$ ,  $\{T\}$  і наділений структурою, яка дозволяє реалізувати релаксаційний процес  $\{Q_k\}$  відносно показника  $F$ , такий що  $F_{k+j} \leq F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $j > 0$ ;  $Q_k \in \{\{\Sigma, \beta\}, \{\text{Opt}, \alpha\}\}$ ,  $F_k \in \{J\}, \{I\}$ . Тут  $\{\Sigma, \beta\}$  - підмножина моделей;  $\{\text{Opt}, \alpha\}$  - підмножина методів оцінювання вектора параметрів моделей  $\{\Sigma, \beta\}$ ;  $\alpha$  - вектор параметрів методу  $\text{Opt}$ ;  $\{J\}$  - підмножина оптимізуємих по  $\beta$  методами  $\{\text{Opt}, \alpha\}$  функціоналів від  $\varepsilon(\beta, t)$ ;  $\varepsilon(\beta, t)$  - різниця вимірюваних координат реального об'єкта  $\Sigma_\infty$  і моделі;  $\{I\}$  - підмножина основних функціоналів, що визначають якість вирішення основної задачі для реальної системи  $\Sigma_\infty$  з використанням моделі  $\{\Sigma, \beta\}$ ;  $\{T\}$  - підмножина моментів  $t_k$  часу, на якому реальну систему  $\Sigma_\infty$  представлено набором даних  $\{u(t_k), y(t_k)\}$  у вигляді системи з точки зору її зовнішньої поведінки [1].

В практичному застосуванні система ідентифікації тим ефективніше, чим менше потрібно для її роботи апріорної інформації. Забезпечення необхідної якості ідентифікації досягається шляхом *адаптації* [3,5,10,20], що полягає в цілеспрямованій зміні одного або всіх елементів підмножини  $\{Q_k\}$  з метою досягнення екстремуму головного показника  $F$ . За інших рівних умов, чим краще алгоритм адаптації, тим ефективніше система. Якщо не враховувати фактор складності, то при адаптації  $\{Q_k\}$  результат тим ефективніший, чим ширша підмножина  $\{Q_k\}$ . При врахуванні в показнику  $F$  складності системи існує оптимальна по  $F$  потужність підмножини  $\{Q_k\}$ .

Зазвичай в адаптивних системах ідентифікації підмножина  $\{\text{Opt}, \alpha\}$  за типом методу  $\text{Opt}$  одноелементна. Спільним для всіх видів систем ідентифікації є наявність РП  $\{\beta_k\}$  щодо показника  $J$ , різним - склад підмножин  $\{Q_k\}$  і  $\{F_k\}$ .

Таблиця 1.1

№ пп	Тип сигналу	{Q <sub>k</sub> }				{F <sub>k</sub> },	
		β	Σ	α	Opt	J	I
1	сі	{β <sub>k</sub> }	Σ	α	Opt	J	-
2	CI	{β <sub>k</sub> }	{Σ}	α	Opt	J	-
3	асі	{β <sub>k</sub> }	Σ	{α <sub>k</sub> }	Opt	J	-
4	АСІ	{β <sub>k</sub> }	{Σ}	{α <sub>k</sub> }	Opt	J	-
5	басі	{β <sub>k</sub> }	Σ	{α <sub>k</sub> }	{Opt}	{J <sub>k</sub> }	I
6	БАСі	{β <sub>k</sub> }	{Σ}	{α <sub>k</sub> }	{Opt}	{J <sub>k</sub> }	I
7	СС	{β <sub>k</sub> }	{Σ}	{α <sub>k</sub> }	{Opt}	{J <sub>k</sub> }	{I <sub>q</sub> }

У табл. 1.1 визначено різні за  $\{Q_k\}$  і  $\{F_k\}$  системи ідентифікації.

1. Системи ідентифікації у вузькому сенсі (сі) реалізують РП  $\{\beta_k\}$  щодо  $J$  за постійних  $\Sigma$ ,  $Opt$ ,  $\alpha$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\beta_k\}$ ,  $F = J$ . Тут задача ідентифікації є еквівалентною задачі оптимізації функції  $J(\beta_k)$ , яка, в залежності від виду  $J$ , може бути вирішена методами теорії лінійного або нелінійного оцінювання або алгоритмами математичного програмування.

2. Системи ідентифікації в широкому сенсі (CI) реалізують РП  $\{\Sigma_k, \beta_k\}$  щодо  $J$  за постійних  $Opt$   $\alpha$ , і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k\}$ ,  $F = J$ . Наприклад, в [3,5,6] розглянуто динамічні ортогональні, ноніусні або регресійні моделі з вектором  $\beta_k$  змінної розмірності, для яких оптимальна по  $J$  пара  $\{\Sigma^*, \beta^*\}$  визначається з умови

$$\{\Sigma^*, \beta^*\} = \arg \min_{\{\Sigma_k, \beta_k\}} J\{\Sigma_k, \beta_k\}.$$

3. Адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (асі) реалізують РП  $\{\beta_k, \alpha_k\}$  щодо  $J$  при постійному  $Opt$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\beta_k, \alpha_k\}$ ,  $F = J$ .

Так, системи [7,8,15], що використовують прискорений градієнтний спуск  $\{\beta_k\}$  по  $J$ , в якості  $\alpha_k$  мають параметр регуляризації, що оптимізується з допоміжної умови мінімуму різниці середньоквадратичних значень помилок для двох однотипних моделей, що настроюються однаковими алгоритмами  $Opt$ , але відрізняються параметром  $\alpha$ : для першого  $\alpha = \alpha_k$ , для другого  $\alpha = \alpha_k + \Delta$ , де  $\Delta > 0$ ,  $\alpha_k > 0$ .



4. Адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (АСІ) реалізують РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$  щодо показника  $J$  при постійному  $Opt$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$ ,  $F = J$ . Наприклад, системи вибору "найкращої регресії", при оцінюванні вектора  $\beta$ , який розширюється за розмірністю, із застосуванням регуляризуючого параметра  $\alpha$ , підбираємо за алгоритмом гребеневої регресії [11].

5. Багатократно адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (басі) реалізують щодо основного показника  $I$  РП  $\{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$  у вигляді композиції двох РП:

а) РП  $\{\beta_{kn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_k$ ;

б) РП  $\{Opt_k, \alpha_k, J_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , щодо  $I$ ; тобто  $Q_k = \{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{J_k, I\}$ . Поняття багатократності пов'язано з повторенням РП  $\{\beta_{k,n}\}$  для кожного елемента  $\{Opt_k, \alpha_k, J_k\}$  РП більш високого рангу.

Часто кожному показнику  $J_k$  відповідає конкретний метод  $Opt$  або для евристичних алгоритмів показник  $J_k$  взагалі відсутній, тоді відносно  $I$  оптимізується пара «метод-його параметри»  $\{Opt_k, \alpha_k\}$ .

Прикладом може служити система "БАСІ—1" [5,10], в якій для заданої за одним із п'яти показників  $I$  (або їх зваженої суми), що включають критерії регулярності та незміщеності [11], точності прогнозування по моделі і т.п., з семи методів  $\{Opt_k\}$  і їх параметрів  $\{\alpha_k\}$  - визначався оптимальний елемент  $\{\beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$  згідно з пп. 5а і б.

6. Багатократно адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (БАСІ) реалізують відносно головного показника  $I$  РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$  у вигляді композиції двох РП:

а) РП  $\{\beta_{k,n}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_k$ ;

б) РП  $\{\Sigma_k, Opt_k, \alpha_k, J_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , щодо  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{J_k, I\}$ , де  $I$  - показник більш високого рівня.

Прикладом БАСІ (при одноелементної множині  $\{Opt\}$ ) є системи, побудовані на основі методу групового обліку аргументів [13], у яких структуру  $\Sigma$  і параметри  $\beta$  підбирають з умови екстремуму  $I$ . За інших рівних умов обґрунтоване [10] розширення

множини  $\{Opt_k\}$  дозволить отримати моделі, більш ефективні за критерієм  $I$ .

Якісною відмінністю систем за пп. 5,6 є їх цілеорієнтація на показник  $I$ , регулюючий і оптимізуючий задачу вибору  $\{\Sigma^*, \beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$ . У багатократно адаптивних системах знімається традиційне для систем за пп. 1-4 питання: як оцінити якість моделі, отриманої в результаті ідентифікації [9]? Якість моделі оцінюють за показником  $I$ . Це найбільш об'єктивна оцінка, так як хороша та модель, застосування якої дає найкраще рішення основної задачі, якість якої визначено показником  $I$ .

7. Системи керування, що самоорганізуються (СС) реалізують щодо деякого показника  $\Lambda(I)$  РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k, J_k, I_k\}$ , у вигляді композиції трьох РП:

а) РП,  $\{\beta_{qkn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ( $q$  і  $k$  постійні), щодо  $J_{qk}$  зі стаціонарною точкою

$$\beta_{qk} = \underset{\beta_{qkn}}{\operatorname{argextr}} J_{qk}(\beta_{qkn}, \Sigma_q, Opt_{qk}, \alpha_{qk}) = \operatorname{arg} J_{qk}^*;$$

б) РП  $\{J_{qk}^*(\beta_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk})\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $q$  постійне), щодо  $I_q$  зі стаціонарною точкою

$$J_q^* = J_q(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q) = \operatorname{argextr} I_q(J_q^*) = \operatorname{arg} I_q^*;$$

в) РП  $\{I_q^*(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q)\}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , щодо показника  $\Lambda$  більш високого рівня зі стаціонарною точкою

$$I^* = \operatorname{argextr} \Lambda(I_q^*) = \operatorname{arg} \Lambda^*,$$

тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{J, I_k\}$ .

Наприклад, задача вдосконалення процесу автоматизованого керування складним енергетичним агрегатом. Нехай  $\Lambda$  - показник ефективності підприємства  $\{I_q\} = \{I_1, I_2\}$ ;  $I_1$  - показник якості стабілізації технологічних змінних  $x$  агрегату в області робочих режимів  $x_0$ , що задаються експертами (технологами),  $I_2$  - показник якості роботи агрегату;  $\{J_{qk}\}$  - множина показників якості ідентифікації локальними моделями  $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$ , що відображають перетворення управління  $u$  в  $x$  ( $k = 1$ ), і моделями якості

$\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , що відображають перетворення  $u$  в  $I_2$  ( $k=2$ ). На першому етапі автоматизації ( $I_q = I_1$ ) за  $J_{1k}$  визначають локальні моделі  $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$  за допомогою найпростіших методів ідентифікації  $\{Opt_{1k}, \alpha_{1k}\}$ . За моделями  $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$  підбирають локальні регулятори, стабілізуючі  $x$  в області  $x_0$  за критерієм мінімуму  $I_1$ . Згідно РП пп. 7, а, 7, б визначають оптимальний по  $I_1$  елемент. На другому етапі, після автоматизації процесу збору і обробки інформації, переходять до побудови більш повної моделі  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , що зв'язує  $I_2$  зі змінними  $x, u$ . По моделям  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , які містять в собі моделі  $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$ , уточнюють параметри локальних регуляторів та оптимальне значення  $x_0^*$  робочих режимів  $x_0$ . Далі оптимальний (вже по  $I_2$ ) елемент  $\{\Sigma_2^*, \beta_2^*, Opt_2^*, \alpha_2^*\}$  визначають вже за результатом РП пп. 7а, 7б. Таким чином, перехід від  $\Sigma_1$  до  $\Sigma_2$  привів до заміни (згідно РП п. 7в) основного показника  $I_1^*$  на  $I_2^*$ .

## 1.2 Багаторівнева декомпозиція систем

Декомпозиція систем є зручним прийомом, що дозволяє точно або наближено представити систему великої розмірності зі складною мережею прямих і зворотних зв'язків системою більш простих підсистем, які краще піддаються формалізації.

Уявімо (рис. 1.1) завдання проектування системи і саму систему оптимального адаптивного управління реальним

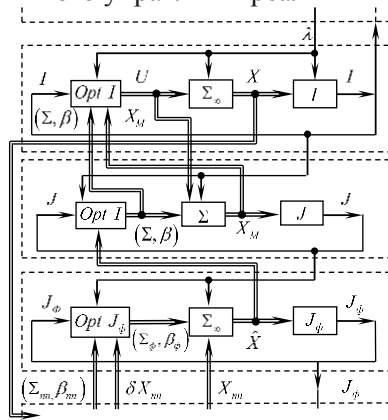


Рис.1.1 Три рівні оптимізації в багаторівневій системі

об'єктом у вигляді трьох підзадач і відповідних їм підсистем:

- оптимального управління реальним об'єктом;
- ідентифікації відображення вхід-вихід об'єкта;
- ідентифікації сигналів об'єкта.

Ці елементи всередині кожної підсистеми утворюють замкнену за місцевим показником якості систему оптимізації, працюючу за алгоритмом систем зі зворотнім зв'язком:

- видача керуючого впливу на об'єкт;
- вимір або розрахунок реакції об'єкта;
- оцінка оптимальності підсистеми за критерієм її рівня.

Між собою підсистеми об'єднано прямими (знизу вгору) і зворотними (зверху вниз) зв'язками. Крайні підсистеми об'єднано такими ж зв'язками з не розглянутими тут системами більш низького та високого рівнів. Наведемо позначення і фізичний зміст елементів, внутрішніх і зовнішніх прямих і зворотних зв'язків.

Підсистема ідентифікації сигналів має такі елементи та зв'язки:

$J_\Phi$  - формувач показника якості ідентифікації (фільтрації) вектора  $x$  сигналів об'єкта;

$\Sigma_\Phi$ - фільтр, що перетворює сигнал виходу первинного перетворювача  $x_{nn}$  в його оцінку  $\hat{x}$ ;

$OptJ_\Phi$ - оптимізатор по  $J_\Phi$  структури  $\Sigma_\Phi$  і вектора  $\beta_\Phi$  параметрів фільтру;

$\Sigma_{nn}, \beta_{nn}$ - інформація про структуру і параметри первинних перетворювачів (датчиків) фізичних змінних об'єкта  $\Sigma_\infty$  - передаточна функція датчика, статична (тарувальна) характеристика і т. п.;

$\delta x_{nn}$  - інформація про похибки датчиків: систематичні, випадкові, часові, частотні та імовірнісні характеристики (закон розподілу, його параметри, кореляційні функції і т. п.);

$J, J_\Phi$  - інформація про критерії оптимальності систем ідентифікації об'єкта і його сигналів:  $J$  надходить по каналу зворотного зв'язку в дану підсистему,  $J_\Phi$  - в підсистему первинних перетворювачів.

Підсистема ідентифікації об'єкта містить:

$J$  - формувач показника якості ідентифікації об'єкта;

$\Sigma, \beta$  - модель об'єкта зі структурою  $\Sigma$  і вектором  $\beta$  параметрів;

$Opt J$  - оптимізатор за показником  $J$  структури  $\Sigma$  і вектора  $\beta$  параметрів моделі;

$\Sigma_\Phi, \beta_\Phi, \hat{x}$ - інформація про фільтр і оцінку  $\hat{x}$  сигналу  $x$ , отриману з сигналу  $x_{nn}$  первинного перетворювача;

$\Sigma, \beta, x_M$ - інформацію про модель  $(\Sigma, \beta)$  об'єкта управління і оцінку  $x_M$  сигналу  $x$ , отриману за сигналом  $\hat{x}$  фільтра;

$I, J$  - коригуючі зворотні зв'язки з системи управління в систему ідентифікації і з системи ідентифікації об'єкта в систему ідентифікації сигналів.

Підсистема оптимального управління об'єктом включає:

$I$  - формувач показника якості управління;

$\Sigma_\infty$ - реальний об'єкт (його вхідні і вихідні змінні  $u$  і  $x$ );

$Opt I$ - оптимізатор показника  $I$  по керуючому впливу  $u$ ;

$x$  - вихід об'єкта - вхід підсистеми первинних перетворювачів;

$u$ - вхід об'єкта і моделі;

$\Lambda, I$  - коригуючі зворотні зв'язки із системи більш високого рівня в систему управління і, відповідно з системи управління в систему ідентифікації.

Кожен елемент (оптимізатор, модель, формувач критерію) має три складові:

- безпосередньо елемент, зав'язаний на вирішенні своєї задачі;

- множину таких елементів, упорядкованих за їх властивостями;

- проєктор (ПР), що вибирає з множини елементів оптимальний за показником якості системи більш високого рангу.

На рис.1.2 подано схеми задач проектування і самі системи I, II і III рівнів. Індеси  $q, qk, qkn$  відповідають позначенням кроків композиційного релаксаційного процесу оптимізації системи. Наприклад,  $q$  – номер ітерації зміни виду показника  $I$ ;  $qk$  – відповідно зміни  $J$ ;  $qkn$  – номер кроку в оптимізації  $\beta$  в системі ідентифікації об'єкта.

Вся система складається з 27 елементів, серед яких елементи –  $\{OptJ_q^q\}, \{OptJ_q\}, \{OptI_q\}$  множини методів оптимізації, критеріїв  $\{J_\Phi^q\}, \{J_q\}, \{I_q\}$  і моделей  $\{\Sigma_\Phi^q\}, \{\Sigma_q\}, \{\Sigma_\infty^q\}$ , складаються з множин наявних упорядкованих елементів. Для конкретного критерію



теоретично існує єдиний оптимальний набір цих елементів і їх параметрів. Задача полягає у виборі «відповідного» (близького за  $I_q$  до оптимального) набору при обмежених витратах на його пошук в системі. Для повної апіорної невизначенності про всі елементи системи та їх властивості проблема віднайдення "підходящого" набору може здійснюватися методом перебору варіантів. Повний перебір гарантує відшукування оптимального набору, якщо в критерій оптимальності не входять витрати на пошук оптимуму. Якщо ці витрати істотні, то вони впливають на оптимальність рішення. Тому для того щоб дана декомпозиція не призвела до ускладнень, необхідний ретельний аналіз підсистем та їх елементів, який дозволяє з допомогою проекторів  $Pr$  систем кожного рівня (рис. 1.2) істотно звузити вихідні множини елементів до обмежених підмножин претендентів на оптимальні для конкретної ситуації.

Принцип декомпозиції ефективний для складних систем та їх елементів. Так, неможливість одним функціоналом сформулювати всі вимоги до створюваної системи призвела до розв'язуваної на практиці задачі декомпозиції цього неформалізованого критерію на множини критеріїв, які піддаються чіткій формалізації, і рішенням багатокритерійної задачі оптимізації. Таке рішення не дає єдиного результату. Воно лише дозволяє виділити обмежену область (підмножина Парето) у просторі критеріїв-функціоналів від оптимізуючих змінних. Остаточний варіант рішення, що обирається проектувальником, належить цій підмножині.

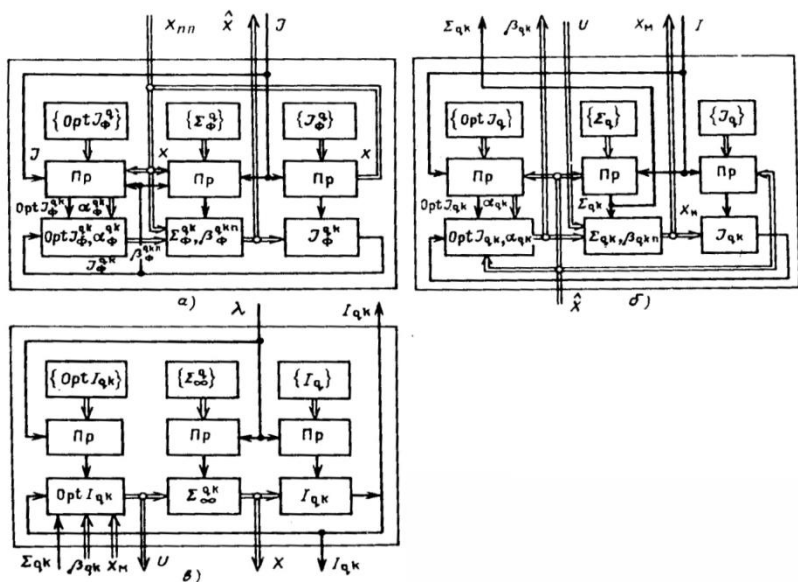


Рис. 1.2. Цілеорієнтована підсистема ідентифікації сигналів (а), об'єкта (б) і оптимального адаптивного керування об'єктом (в)

Ще більш поширений принцип декомпозиції для методів оптимізації:

- найпростіший метод координатної оптимізації  $I$  (метод Гауса-Зейделя), а також метод групової релаксації реалізують декомпозицію простору оптимізуючих змінних і почергової покоординатної або групової оптимізації;

- для лінійних оптимальних за квадратичним функціоналом стохастичних систем управління декомпозиція загальної задачі на підзадачі оптимального оцінювання станів та пошуку оптимальної стратегії управління [16] дозволяє істотно спростити складну задачу дуального управління;

- для задачі спільного оцінювання параметрів і станів стохастичних об'єктів (розширений фільтр Калмана [17], метод квазі-лінеаризації і інваріантного занурення [18]), поділ (декомпозиція) на незалежні підзадачі оцінювання сигналів, їх коварційних матриць, а потім параметрів дозволяє отримати рішення, близьке до оптимального, досить простими алгоритмами.

Особливий інтерес представляє задача декомпозиції моделі (1.1), описуваної системою нелінійних нестационарних рівнянь

$$\dot{x}_g(t) = f_g(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad g = \overline{1, n}, \quad (1.5)$$

множиною лінійних систем (1.2), що описують з необхідною точністю поведінку системи (1.1) в обмежених областях визначення змінних  $t, x, u$ . Ці локальні моделі виду (1.2) дозволяють у рамках лінійно-пропорційних систем легко вирішувати задачі аналізу, синтезу і реалізації оптимальних стратегій керування та ідентифікації.

По локальним моделям можна вирішувати задачу ідентифікації структури невідомої нелінійної залежності  $F$  моделі (1.1). Введемо в (1.5) позначення вектора  $v$  з компонентами  $V_i$ :

$$v_i = \begin{cases} x_i, i = \overline{1, n}; \\ u_i, i = \overline{n+1, n+m}; \\ t, i = n+m+1 = s. \end{cases} \quad (1.6)$$

В силу безперервності і  $l$ -кратної диференційованості залежності (1.1) залежність (1.5) може бути представлена рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} y(v(t)) = & y(v_0) + \sum_{i=1}^s \left. \frac{\partial y}{\partial v_i} \right|_{v_0} \Delta v_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left. \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \right|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k + \dots + R_l(v), \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $\Delta v_i(t) = v_i(t) - v_{i0}$ ;  $v \in G$ ;  $v_0 \in G$ ;

$\text{Sup} R_l(v) \leq \delta$ ;  $\delta$  — допустима похибка апроксимації залежності (1.1) рядом (1.7).

Розіб'ємо область  $G$  завдання змінних  $v$  на підобласті  $G_r$  так, що

$$a) \bigcup_{r=0}^m G_r = G, v_{r0} \in G_r, G_r \cap G_{r'} = \emptyset, r \neq r';$$

$$б) (\forall G_r) (\exists \beta_r = \underset{\beta_r \in R}{\operatorname{argmin}} \left( \sup_{v_{r0} \in G_r} \left\| \frac{dy}{dx} \right\|_{v_{r0}} \beta_r < h \right),$$

де  $\beta_r$  - вектор параметрів лінійної моделі

$$\Delta y_1(t) = \beta_r^T \Delta v(t) \quad (1.8)$$

$i$ -а компонента  $\beta_{ri}$  якого є оцінка з точністю до  $h$  коефіцієнта  $\left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{v_0}$ , розкладання (1.7) навколо центру  $v_{r0}$ .

Для області  $G_o$ , яка містить глобальний центр  $v_0$  розкладання (1.7) за моделлю (1.8) і даними  $y_1(t)$ ,  $v(t)$ , знайдемо вектор  $\beta_r$ , який дорівнює (з точністю до  $h$ ) вектору  $\left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{v_0}$ , тобто отримаємо оцінки перших похідних в  $\left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{v_0}$  (1.7).

Аналогічно обчислимо вектори  $\beta_r$  часткових моделей (1.8.) для решти областей  $G_r \in G$ . Тепер за значеннями  $\beta_r$  і  $v_{r0}$  можна оцінити похідні більш високих порядків. Так, якщо об'єднати сусідні з  $G_o$  підобласті в розширену  $G_{01} = \bigcup_{r=1}^{m_1} G_r, m_1 \geq s$ , (для простоти позначень будемо вважати, що області перенумеровані з віддаленням від "центральної"  $G_o$ ), таку, що

$$\sup_{v \in G_{0j}} R_3(v) \leq \delta,$$

то розклад (1.7), з точністю до  $\delta$ , буде містити члени не вище другого порядку. Продиференціюємо (1.7) в області  $G_{01}$  по  $v_j$ , тоді (з точністю до  $\partial R_3(v) / \partial v_j$ )

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} = \left. \frac{\partial y}{\partial v_j} \right|_{v_0} + \sum_{i=1}^s \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0} \Delta v_i, \quad (1.9)$$

де  $\left. \frac{\partial y}{\partial v_j} \right|_{v_0}$  визначено з (1.8) для підобласті  $G_o$ .

Якщо різниця  $\Delta v_i = v_{r0i} - v_{0i}$ , то їй наближено відповідає похідна

$$\left. \frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} \right|_{v_{r0}} \approx \beta_{rj}.$$

Отже, вираз (1.9) можна подати у вигляді

$$\beta_{rj} = \beta_{0j} + \sum_{i=1}^s \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0} (v_{r0i} - v_{0i}). \quad (1.10)$$

Звідси для  $r \geq s$  і, за умови лінійної незалежності хоча б  $s$  з  $r$  векторів  $(v_{r0} - v_0)$ , однозначно визначають  $s$  других похідних

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Для знаходження всіх коефіцієнтів  $\left. \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \right|_{v_0}$  ряду (1.7)

необхідно мати не менше  $s$  розширених навколо  $G_r^*$  підобластей  $G_{r1}^*$ , подібних  $G_{01}$  (число таких центральних підобластей повинно бути не менше  $s$ ). Для кожної  $G_{r1}^*$  з рівняння (1.10) (в якому замість  $\beta_{0j}$  і  $v_{0i}$  взято значення, отримані для центральної підобласті  $G_r^*$ )

знаходять другі похідні  $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_{r*0}}$ . Двічі диференціюючи (1.7),

отримаємо

$$\left. \frac{\partial^2 y(t)}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_{r*0}} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0} + \sum_{k=1}^s \left. \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \right|_{v_0} (v_{r*0k} - v_{0k}). \quad (1.11)$$

Звідси для  $r^* \geq s$  і за умови лінійної незалежності хоча б  $s$  векторів  $(v_{r*} - v_0)$  однозначно визначають треті похідні. Аналогічно отримують всі похідні ряду (1.7) і тим самим визначають його структуру. При недостатній кількості підобластей  $G_r$  можливо відновлення частини структури з тих  $v_j$ , які змінюються від області до області. При проведенні активного експерименту мінімізація числа областей  $G_r$  і оптимізація точності



оцінок похідних в (1.7) досягається застосуванням композиційного планування експерименту, яке забезпечує ортогональність векторів  $(v_{r0} - v_0), (v_{r^*0} - v_0)$ .

Перевагою такого підходу є обмежена (на кожному кроці розширення) розмірність вектора невідомих параметрів, можливість аналізу на кожному кроці значущості знайдених коефіцієнтів ряду (1.7) і відкидання незначущих.

Приклад 1.1. Нехай невідома залежність (1.6) має вигляд

$$y(v) = v_1(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t),$$

де змінні  $y(v), v_i(t)$  визначено наступним чином  $(v_{01} = 0, v_{02} = 0) \in G_0; (v_{11} = -1, v_{12} = 0) \in G_1; (v_{21} = 0, v_{22} = -1) \in G_2; y(0) = 0$ .

В кожній області є по два вимірювання  $v_i(t_{jr})$ , відхилення яких від центрів для кожної області однакові:  $\Delta v_1(t_{1r}) = 0,1; \Delta v_2(t_{1r}) = 0; \Delta v_1(t_{2r}) = 0, \Delta v_2(t_{2r}) = -0,1$ . Враховуючи ці відхилення, отримуємо  $\Delta y(t_{10}) = 0,1; \Delta y(t_{20}) = 0,005; \Delta y(t_{11}) = 0,1;$

$$\Delta y(t_{20}) = 0,055; \Delta y(t_{12}) = 0,5; \Delta y(t_{22}) = 0,105.$$

Потрібно визначити структуру і параметри невідомої залежності  $y(v)$ .

Рішення задачі:

а) для  $G_0$  складемо рівняння (1.8)

$$\Delta y(t_{j0}) = \beta_{01} \Delta v_i(t_{j0}) + \beta_{02} \Delta v_2(t_{j0});$$

підставивши дані, отримаємо

$$0,1 = \beta_{01} \times 0,1 + \beta_{02} \times 0; \quad 0,005 = \beta_{01} \times 0 + \beta_{02} \times (-0,1);$$

Звідси маємо шукані перші члени ряду (1.7):

$$\beta_{01} = 1; \beta_{02} = -0,05;$$

б) для  $G_1$ :

$$\Delta y(t_{j1}) = \beta_{11} \Delta v_1(t_{j1}) + \beta_{12} \Delta v_2(t_{j1}),$$

звідси  $\beta_{11} = 1$ ;  $\beta_{12} = 0,55$ ;

в) для  $G_2$ :

$$\Delta \phi(t_{j2}) = \beta_{21} \Delta v_1(t_{j2}) + \beta_{22} \Delta v_2(t_{j2});$$

звідси  $\beta_{21} = 0,5$ ;  $\beta_{22} = -1,05$ ;

г) маючи  $\beta_{ir}$ , можна, згідно з рівнянням (1.10), переходити до знаходження других похідних у (1.7):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}),$$

де зліва різниця  $\beta_{r1}$ ,  $r = 1, 2$ , и  $\beta_{01}$ , а  $(v_{r0j} - v_{0j})$ ,  $j = 1, 2$  - різниця координат центрів  $r$ -ї і нульової області.

Аналогічно друге рівняння

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}).$$

Підставивши дані для першого рівняння, отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} \times (-1) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} \times 0; \\ -0,5 &= \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} \times 0 + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} \times (-1). \end{aligned} \right\}$$

Її розв'язок відразу вказує (!) на відсутність квадратичної залежності від  $x_I$ :

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} = 0; \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} = 0,5.$$

Аналогічно, з другого рівняння

$$\begin{cases} 0.5 = \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot 0 + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \cdot (-1); \\ -1 = \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \times (0); \end{cases}$$

отримаємо рішення

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} = 1; \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} = 0,5.$$

Отримані значення перших і других похідних підставимо в (1.7). Враховуючи, що  $v_0=0$ ,  $y_0=0$ , знаходимо оцінку  $\hat{y}(v)$  невідомої залежності  $y(v)$ :

$$\hat{y}(v) = v_1(t) - 0,05v_2(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t).$$

Оцінка  $\hat{y}(v)$  відрізняється від  $y(v)$  на несуттєву для області  $G$  величину  $-0.05v_2(t)$ , яка з'явилася внаслідок наближеності обчислення перших похідних.

Не менш ефективний принцип декомпозиції має місце і при описі сигналів. Можна говорити про часове і частотне розбиття сигналів. Часове розбиття можна будувати за різними ознаками, наприклад виділення інтервалів, відповідних статичним і динамічним режимам об'єкта, для незалежного вивчення його статистики та динаміки; виділення сильно- і слабозашумлених ділянок записів змінних для оптимального вибору інтервалів і алгоритмів оцінювання сигналів; виділення "інформативних" (в сенсі ідентифікації моделі об'єкта) ділянок записів з некорельованими або ортогональними змінними. Частотне розбиття еквівалентно розкладенню сигналів в ряд Фур'є. Перехід в частотну область дозволить достатньо просто синтезувати оптимальний фільтр Вінера для оцінювання сигналів [17]. Сучасна спектральна теорія аналізу і синтезу систем [19] також заснована на розкладанні сигналів і їх функціональних відображень. Розкладання проводиться за системою ортогональних функцій. Декомпозиція сигналів складних коливальних систем дозволяє

виділити окремі тони і побудувати для них часткові спрощені моделі літака [18]. Таким чином принцип декомпозиції доцільний на всіх рівнях і для всіх елементів складних систем.

### 1.3. Принцип узгодженості критеріїв

Для ієрархічної системи управління (рис.1.1) існує хоча б одне значення для елементів множини  $\{I, opt I, J, opt J, \Sigma, \beta, I_\phi, opt I_\phi, \Sigma_\phi, \beta_\phi, I_{nn}, opt I_{nn}, \beta_{nn}\}$ , за якого головний показник  $\Lambda$  оптимальний, якщо не враховувати витрати на пошук цього значення.

Реальні оптимізаційні задачі не можуть не враховувати ці втрати. Тому релаксаційний процес відшукування абсолютного екстремуму (наприклад, мінімуму) зупиняється на певному етапі, якщо подальший приріст втрат на пошук перевищить зменшення решти частини функціоналу.

При повній відсутності інформації про залежність  $\Lambda$  від елементів множини пошук абсолютного екстремуму виконується методом перебору: з усіх  $n$  можливих значень  $m$  змінних множини  $F$  вибирається  $m$  оптимальних значень. Загальне число кроків РП

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ для реальних значень } m \text{ і } n \text{ надмірно велике.}$$

Задача набагато порядків спрощується, якщо кожен з функціоналів  $\Lambda, I, \dots, J_{nn}$  оптимізується на підмножині змінних свого рівня:  $X, u, \dots, (\Sigma_{nn}, \beta_{nn})$ . Це призводить до композиції умовно оптимальних рішень

$$\Lambda^* = \text{extr} \Lambda$$

$$x \big|_{I^* = \text{extr} I}$$

$$u \big|_{I^* = \text{extr} I} \tag{1.12}$$

$$(\Sigma, \beta) \big|_{J_\phi^* = \text{extr} J_\phi}$$

$$(\Sigma_\phi, \beta_\phi) \big|_{J_{nn}^* = \text{extr} J_{nn}}$$

$$(\Sigma_{nn}, \beta_{nn}) \big|_{\dots},$$

де зліва від кожної вертикальної риски змінна, що оптимізує функціонал "свого" рівня, праворуч - результат умовної оптимізації на нижніх рівнях.

Оптимізаційна задача кожного рівня піддається досить строгій формалізації, що дозволяє інтенсифікувати процес пошуку умовного екстремуму. Проблема розмірності знімається, але залишається проблема ефективності вирішення (1.12).

Щоб процедура (1.12) давала рішення, близьке до абсолютного екстремуму головного функціонала, необхідно забезпечити непротирічність критеріїв  $\Lambda, I, \dots, J_{nn}$ . Критерії  $\Lambda, I, \dots, J_{nn}$  називають *абсолютно узгодженими*, якщо композиція умовних рішень (1.12) призводить до глобального екстремуму  $\Lambda$ . Два сусідніх за рівнями функціонала назовемо *локально несуперечливими*, якщо їх варіації подібні в обмеженій області  $G$  простору змінних підсистеми нижнього рівня:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Lambda(u + \delta u) &= k_1 \delta I(u + \delta u); \\ \delta I(\beta + \delta \beta) &= k_2 \delta J(\beta + \delta \beta); \\ \delta J(\beta_\phi + \delta \beta_\phi) &= k_3 \delta J_\phi(\beta_\phi + \delta \beta_\phi); \\ \delta J_\phi(\beta_{nn} + \delta \beta_{nn}) &= k_4 \delta J_{nn}(\beta_{nn} + \delta \beta_{nn}). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Якщо перетин областей  $G_i$  існування змінних  $i$ -х рівнів представляє не порожню множину, що включає точку, що визначає глобальний екстремум за  $\Lambda$ , то їх багаторазова послідовна оптимізація від  $J_{nn}$  до  $\Lambda$  та назад від  $\Lambda$  до  $J_{nn}$  в принципі дозволяє відшукати глобальний екстремум  $\Lambda$ . Проте досягти його не просто. Пояснюється це тим, що будувати оптимальним чином функціонали зверху вниз неможливо через незнання оптимальних по верхньому функціоналу значень елементів нижніх рівнів. Так, не можна синтезувати функціонал  $I$  управління  $u$  на об'єкті  $\Sigma_\infty$  не знаючи якою математичною моделлю  $(\Sigma, \beta)$  він буде описаний, який рівень і вид шумів  $\epsilon$  в оцінках  $X_M$ , отриманих за оцінками підсистеми фільтрації і т. д.

Можна застосувати мінімаксий підхід [14], і будувати  $I$  так, щоб для найгіршої моделі  $(\Sigma, \beta)$  та оцінок  $X_M$  сигналу отримати найкраще гарантоване вирішення. Але ж у загальній системі (див. рис. 1.1) є підсистема ідентифікації, яка в результаті оптимізації

дасть завжди рішення не гірше гіршого, тому, застосовуючи мінімаксний підхід, програємо в оптимальності.

Доцільним є наступний алгоритм побудови локально несуперечливих функціоналів:

1. На підставі апріорної інформації про об'єкт  $\Sigma_{\infty}$ , головний функціонал  $\Lambda$  і наявних елементах підсистем усіх рівнів, з урахуванням принципу раціонального ускладнення [20] на першому кроці багаторівневого РП приймають найпростіші, що задовольняють апріорно відомим даним, підсистеми первинних перетворювачів оцінювання сигналів  $X$  і моделі  $(\Sigma, \beta)$  і оптимального управління  $u$ .

2. Вибрані підсистеми  $i$ -го рівня оптимізують методом перебору структур і методом оптимізації за апріорно прийнятим критерієм підсистем  $i + 1$ -го рівня:  $\Sigma_{nn}$  по  $J_{\Phi}$ ,  $(\Sigma_{\Phi}, \text{Opt} J_{\Phi})$  по  $J$ ,  $(\Sigma, \text{Opt} J)$  по  $I$ ,  $(\text{Opt} I)$  по  $\Lambda$ . Так як розмірності цих змінних невеликі, то витрати на пошук допустимі. У результаті цієї оптимізації отримаємо оптимальну систему першого наближення.

3. Методами теорії чутливості, або моделювання і планування експерименту [23], проектують несуперечливі критерії  $I, J, J_{\Phi}, J_m$ .

Розглянемо спочатку підхід, заснований на аналітичному обчисленні чутливості функціоналів. Нехай є оптимальна система першого наближення, в якій реальний об'єкт  $\Sigma_{\infty}$  замінено його моделлю  $(\Sigma, \beta)$ . Знайдемо варіацію основного функціоналу  $\Lambda$  відносно його екстремального значення  $\Lambda^*(u^*)$ , викликану варіацією  $\delta u$  оптимального управління об'єктом. Нехай

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon \delta u(t), \quad (1.14)$$

де  $\varepsilon$  - мала величина;  $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$  - вектор-функція часу  $t$ .

Нехай

$$\Lambda(u(t)) = \int_{\theta_1} \lambda(u^*(t) + \delta u(t) \varepsilon) dt, \quad (1.15)$$

де  $\int_{\theta_1}$  - оператор інтегрування на інтервалі  $\theta_1$  часу  $t$ ;  $\lambda(\cdot)$ - скалярна

функція векторного аргументу  $u$ .

Знайдемо першу варіацію  $\Lambda$ :

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \int_{\theta_1} \frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} dt = \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} dt = \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt,$$

де

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial\varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Тепер візьмемо другу варіацію:

$$\begin{aligned} \delta^2\Lambda &= \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt = \\ &= \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \cdot \delta u \cdot dt = \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right) \delta u \right]^T \frac{\delta u}{\partial\varepsilon} dt, \end{aligned} \quad (1.16)$$

де

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^T \partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Якщо  $\Lambda$  визначено на  $x(t)$ , а не на  $u(t)$ , то, діючи аналогічно, отримаємо

$$\delta^2 \Lambda = \int_{\theta_1} \delta x^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \delta x dt,$$

або

$$\delta^2 \Lambda = \int_{\theta_1} \partial u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \delta u dt, \quad (1.17)$$

де

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u,$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Зіставляючи (1.16) і (1.17), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^T \partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u}. \quad (1.18)$$

На екстремалі  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  перша варіація дорівнює нулю, друга варіація (1.16) або (1.17) визначає еталонну [дня функціонала  $I(u)$ ] поверхню у функціональному просторі варіацій  $\delta u(t)$ . Нехай  $\delta u(t) = 1(t)$ - одинична вектор-функція від  $t$ , тоді (1.17) являє еталонну для  $I$  матрицю  $A_I$  дійсних чисел

$$\delta^2 \Lambda = A_I = \int_{\theta} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} dt. \quad (1.19)$$

При побудові функціонала  $I$  будемо прагнути, щоб аргументи екстремумів  $\Lambda$  та  $I$  співпали, а другі варіації були подібні.



Приклад 1.2. Нехай

$$I = \int_{\theta_2} (x^T G x + u^T Q u) dt, \quad (1.20)$$

де  $G, Q$ - вагові матриці;  $\theta_2$ - інтервал управління.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} &= \int_{\theta_2} \left[ \delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G x + x^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q u + u^T Q \delta u \right] dt, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_2} [\delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q \delta u] du = \\ &= \int_{\theta_2} \delta u^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] \delta u dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для тих же, що і в (1.19), одиничних варіацій  $\delta u$  функціонал (1.20) буде несуперечливим основному, якщо варіації (1.19) і (1.21) будуть подібними:

$$\int_{\theta_2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] dt = k_1 A_1, \quad (1.22)$$

або в скалярному вигляді

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \int_{\theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} dt + \int_{\theta_2} q_{lk} dt = k_1 \alpha_{lk}^1, l, k = \overline{1, m}; \quad (1.23)$$

де  $k_1$ - коефіцієнт подібності;  $\alpha_{lk}^1$  - елемент матриці  $A$  в (1.19);  $g_{ij}, q_{lk}$  - елементи матриць  $G$  і  $Q$  відповідно.

Так як  $A_1$  симетрична, то загальна кількість рівнянь (1.23)  $0,5m \times (m+1)$ , а коефіцієнтів, що необхідно підібрати,  $g_{ij}, q_{lk} 0,5 n (n + 1)$  і  $0,5 m (m + 1)$  відповідно. Це дозволяє підбором їх задовольнити  $m (m + 1)$  вимогам (1.23) несуперечності  $I$  до  $\Delta$ , а також ряду інших вимог, що визначаються системою оптимізації  $I$ . При такому

підході до побудови функціоналу  $I$  істотно полегшується задача [24] завдання матриць  $G$  і  $Q$ .

Наступний крок полягає в побудові критерію  $J$  підсистеми ідентифікації. Нехай на попередньому кроці було отримано несуперечний з  $\Lambda$  функціонал  $I$  (1.20) з ваговими  $G^*$  і  $Q^*$ , що задовольняють умову (1.23). Знайдемо другу варіацію  $I$  вже в просторі параметрів  $\beta$  моделі  $(\Sigma, \beta)$  і задамо її в якості еталону для функціоналу  $J$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \epsilon^2} = \int_{\theta_2} \delta u^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + Q^* \right] \delta u dt,$$

де

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_{r1}}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial \beta_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_r} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \delta^2 I(\beta) &= \int_{\theta_2} \delta \beta^T \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta dt = \\ &= \delta \beta^T \left[ \int_{\theta_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \times G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta = \delta \beta^T A_2 \delta \beta. \end{aligned} \quad (1.24)$$

У функціоналі

$$J = \int_{\theta_3} i(\hat{x}, x_M, \alpha) dt \quad (1.25)$$

в точці  $\hat{x} = x_M$ , що відповідає оцінці  $\hat{\beta}$ , що дорівнює  $\beta$ , перша варіація  $J$  повинна бити рівною нулю, а друга

$$\delta^2 J(\beta) = \delta \beta^T \left[ \int_{\theta_3} \left( \frac{\partial x_M}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_M^T \partial x_M} \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta$$

подібна (1.24), тобто:

$$A_3 = \int_{\theta_3} \left( \frac{\partial x_M}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_M^T \partial x_M} \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \beta} dt = k_2 A_2, \quad (1.26)$$

де  $A_2$  містить  $0,5r(r+1)$  різноманітних елементів  $\alpha_{ij}^2$ .

Для того, щоб повністю задовольнити (1.26) функціонал (1.25) повинен містити не менше ніж  $0,5r(r+1)$  керованих параметрів  $\alpha$ .

Нехай, як приклад, модель  $(\Sigma, \beta)$  представлено у вигляді

$$x_M(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) u(t), \quad (1.27)$$

де  $W_i(p)$  - задані оператори від  $p = \frac{d}{dt}$ .

Покладемо, що в (1.24)

$$A_2 = \text{diag} [\alpha_{ij}^2].$$

З умови (1.26), тобто з умови  $k_2 \alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3$ , знайдемо  $u(t)$  і представимо набором ортогональних функцій  $\varphi_k(t)$ :

$$u(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (1.28)$$

де  $m$  - кількість членів  $\varphi_k(t)$ , що надають адекватне уявлення  $u(t)$  на інтервалі ідентифікації  $\theta_3 = [0 \quad T]$ ;  $\varphi_k(t), k = \overline{1, n}$  - система ортогональних функцій, наприклад косинусний ряд

$$\varphi_k(t) = \cos \left( \frac{2k-1}{2} \right) \frac{\pi}{T} t. \quad (1.29)$$

Якщо  $J = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt$ , де  $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x_M(t)$ , то в (1.26) елементи

$$\alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3 / k_2 = \int_0^T [W_i(p) u(t)] [W_j(p) u(t)] dt.$$

Позначимо

$$W_i(p)u(t) = y_i(t), i = \overline{1, n},$$

де з урахуванням (1.28), (1.29)

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k [W_i(p)\varphi_k(t)] = \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ij}(t);$$

$$y_{ij}(t) = W_i(p)\varphi_k(t).$$

Тоді

$$\frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} = \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ik}(t) \right) \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{jk}(t) \right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ik},$$

де  $y_{ik} = \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt$  розраховується заздалегідь.

Оптимальне значення  $\alpha$  знайдемо з умови

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in R} \left\| \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} - \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ij}^{kq} \right\|, i, j = \overline{1, n},$$

(1.30)

де всі змінні, крім  $\alpha$ , заздалегідь розраховані. Якщо розмірність  $\alpha$  дорівнює або більше  $0,5 r (r + 1)$ , то мінімум норми в (1.30) дорівнює нулю і маємо точну подібність варіацій функціоналів  $J$  та  $I$ .

Аналогічно попереднім, отримавши  $J$  і визначивши його варіацію від вектора  $\beta_\Phi$  параметрів фільтру, підбираємо показник  $J_\Phi$  якості фільтру ( $\Sigma_\Phi \beta_\Phi$ ) з умови подібності (1.24), а показник  $J_m$  якості первинних перетворювачів - подібним  $J_\Phi$ , отриманому на попередньому кроці.

Зважаючи на складність аналітичного рішення задачі узгодження функціоналів конструктивним є підхід, що полягає у плануванні комп'ютерного експерименту.

Створення систем автоматизованого проектування (САПР) критеріїв ієрархічних систем при наявності відповідного

математичного забезпечення істотно полегшує задачу. На ЕВМ послідовно імітуються підсистеми двох суміжних рівнів, починаючи з верхнього; здійснюється експеримент, направлений на визначення других варіацій функціоналів відносно їх екстремального значення; формується додатковий функціонал [типу (1.30)], що визначає близькість (подібність) других варіацій заданого (верхній рівень) і синтезованого (нижній) функціоналів; додатковий функціонал оптимізується шляхом підстроювання параметрів підсистеми нижнього рівня. Для скорочення варіантів доцільно застосовувати оптимальні плани експерименту [23].

Якщо експеримент виконується для дослідження області екстремуму функціоналу, то при відомому значенні екстремуму, для визначення тільки других варіацій, необхідно і достатньо виконувати "зірковий експеримент", що полягає в почерговому відхиленні на величину "зоряного плеча"  $\pm\alpha$  кожної зі змінних, по яким знаходиться друга варіація функціонала; якщо координати екстремуму функціоналу невідомі, то оптимальним експериментом, з метою побудови квадратичної моделі виду

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 \quad (1.31)$$

буде центральний композиційний план Бокса [23,25]. Цей план можливо зробити ортогональним. Нормовані змінні моделі (1.31) приймають п'ять значень - 0, +1, -1, + $\alpha$ , - $\alpha$ . План експерименту містить:

1) повний факторний - експеримент  $2^n$  або дрібні репліки (якщо  $n \gg 5$ ) [23];

2) "зірковий план";

3) точку в центрі плану (всього  $N$  експериментів).

Для побудови ортогонального плану модель (1.31) перетворюють до виду

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (1.32)$$

де

$$b_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2, \tilde{x}_i^2 = x_i^2 - c, c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^2(k),$$

$k$ - номер досліду.

Нові змінні  $\tilde{x}_i^2$  будуть зміщуватися на значення  $-c$ . Це дозволить підібрати  $\alpha$  так, щоб всі стовбці матриці експерименту були попарно ортогональні.

Наприклад, для  $n = 3$  та моделі (1.31) матриця плану Боксу представлена в табл. 1.2, де  $c = (1 / 15) 2 \sum_{k=1}^{15} x_i^2(k) = (8 + 2\alpha^2) / 15$  для будь-якого  $i$ .

"Зоряне плече"  $\alpha$  підбирають згідно табл. 1.2 з умови ортогональності  $\tilde{x}_j^2$ :

$$\sum_{k=1}^N x_i^2(k) x_j^2(k) = 8(1-c)^2 - 4c(\alpha^2 - c) + 3c^2 = 0.$$

Підставивши сюди вирази для  $c$ , отримаємо

$$\alpha = \sqrt{30} - 4 \approx 1,5, c \approx 0,83.$$

Внаслідок взаємної ортогональності коефіцієнти  $b_0, \alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{jj}$ , моделі (1.36) визначають за методом найменших квадратів незалежно.

Від цих коефіцієнтів легко перейти до коефіцієнтів моделі (1.31), а від неї до моделі з ненормованими змінними. Для цього  $\alpha_j$  - ділять на модуль кроку варіювання  $i$ -ї змінної,  $\alpha_{ij}$  - на добуток цих модулів  $j$ -ї та  $i$ -ї змінної,  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i \neq j$ .

При наявності моделей (1.31) функціоналів підсистем верхнього і нижнього рівнів, нижній конструють по верхньому шляхом варіювання структури і параметрів нижньої підсистеми з умови мінімуму додаткового функціонала різниці коефіцієнтів  $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ii}$  моделей (1.31) двох рівнів. Тут також можна досягти скорочення числа різних варіантів, застосовуючи методіку планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціоналу від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх,

одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються.

Таблиця 1.2

Вид плану	Нормовані змінні $X(k)$										
	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_2X_3$	$\tilde{x}_1^2$	$\tilde{x}_2^2$	$\tilde{x}_3^2$	$y(k)$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1-c	1-c	1-c	$y(1)$
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1-c	1-c	1-c	$y(2)$
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(3)$
	1	1	1	-1	1	-1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(4)$
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(5)$
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(6)$
	1	-1	1	1	-1	-1	1	1-c	1-c	1-c	$y(7)$
	1	1	1	1	1	1	1	1-c	1-c	1-c	$y(8)$
2	1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - c$	$-c$	$-c$	$y(9)$
	1	$\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - c$	$-c$	$-c$	$y(10)$
	1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2 - c$	$-c$	$y(11)$
	1	0	$\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2 - c$	$-c$	$y(12)$
	1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2 - c$	$y(13)$
	1	0	0	$\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2 - c$	$y(14)$
	1	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$	$y(15)$

Забезпечення несуперечності критеріїв теоретично або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію  $\Delta$ ).

#### 1.4. Композиція підсистем різних рівнів в єдину систему

Третім, завершальним, етапом розробки близьких до оптимальних по  $\Delta$  структури і алгоритмів функціонування

багаторівневої системи оптимізації, є етап композиції (сполуки) окремих підсистем в єдиний комплекс.

Сформульовані визначення системи, релаксаційних процесів, принципу раціонального ускладнення [10] дозволяють окреслити коло основних підходів до проблеми композиції:

- впорядкування елементів множин моделей і методів оптимізації;
- вибір оптимальної системи першого наближення;
- організація релаксаційних процесів ускладнення і вдосконалення окремих елементів систем і, можливо, структури самої системи, починаючи з оптимальної системи першого наближення і закінчуючи оптимальною за  $\Lambda$ .

Впорядкування елементів підсистем реалізується проекторами  $Pr$ , звужуючими на першому кроці початкову множину елементів до підмножин допустимих, а потім до підмножини претендентів на оптимальні елементи. Наприклад, допустимими при неповній спостережуваності об'єкта  $\Sigma_\infty$  є методи нелінійної ідентифікації, які не потребують повної спостережуваності  $\Sigma_\infty$ . На першому рівні проекторів  $Pr_1$  виділяють ті елементи (методи і моделі), які можуть бути застосовані в даній ситуації, яка визначається сигналами  $\hat{u}, \hat{x}$ , що спостерігаються, і заданими критеріями  $J_\phi, J, I, \Lambda$ . Тут проектори є багатовимірними дискримінаторами, що пропускають на вихід ті елементи, властивості яких повністю узгоджуються з факторами, що визначають реальну ситуацію. На другому рівні проектори  $Pr_2$  виділяють два-три претенденти на оптимальність. Для цього в проекторі  $Pr_2$  для кожного елемента закладені регресійні залежності відповідних критеріїв  $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$  (якщо критерії апіорі реалізувати не можна) від кількісно розрахованого вектора факторів  $\theta$ , який характеризує конкретну ситуацію.

Для елементів-методів лінійного оцінювання чинниками є співвідношення сигнал-шум по амплітуді і ширині спектрів, корельованість сигналів, наближеність моделі (величина кінцевої помилки апроксимації) і т. п. Визначивши в просторі цих факторів кілька найбільш характерних для практики регресійного аналізу областей, далі для кожної області будують регресійну залежність відповідного критерію  $J_\phi, \dots, \Lambda$ , або його оцінки  $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$  від  $\theta$ . Тоді



проектор  $Pr_1$  визначає область, а  $PP_2$  - для кожного елементу значення критерію для конкретного  $\theta$ , що належить цій області. Задача побудови проєкторів відноситься до етапу проектування і вимагає тим більших витрат, чим точніше проєктори і ширше області та розмірності факторів  $\theta$ .

Вибір оптимальної системи першого наближення було подано вище. Основним процесом на цьому етапі є організація структури системи. Розглянемо варіант структури системи оптимізації  $J$  – систему ідентифікації. У табл. 1.1 структурно систематизовані підсистеми ідентифікації від найпростішої до такої, що самоорганізується: для створення підсистеми ідентифікації в багаторівневій системі оптимізації  $\Lambda$  (якщо  $\Sigma^*$  і  $Opt^*$  апріорно невідомі) з табл. 1.1 в якості допустимої приймаємо структуру БАСІ. Для цієї системи ідентифікації, на відміну від більш простих, характерна замкненість по основному (для неї) критерію  $I$  і неединичність елементу  $\Sigma$  (як для басі). Складемо функціональну схему БАСІ, визначивши її взаємозв'язок з підсистемами верхніх і нижніх рівнів (рис. 1.3). Характерні частини системи (підсистеми) обведено пунктиром і пронумеровано: 1 - оптимізація  $\Lambda$ , 2 - оптимізація  $I$ , 3 – оптимізація  $J$ , що доповнює найпростішу систему ідентифікації (частина 4) до багатократно адаптивної (частини 3 і 4), 5 - оптимізація  $J_\phi$ .

Частина 4 системи містить функціонал  $J_{qk}$ , який задається вище, модель  $\Sigma_{qk}$  з вектором  $\beta_{qkn}$ , параметрів, що налаштовуються, оптимізатор ( $Opt_{qk}, \alpha_{qk}$ ). Тут реалізується РП  $\{\beta_{qkn}\}, n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_{qk}$  за допомогою оптимізатора  $Opt_{qk}, \alpha_{qk}$ . Після закінчення РП інформація про оптимальні за  $J_{qk}$  структурі  $\Sigma_{qk}$  і векторі  $\beta_{qk}$  параметрів моделі надходить в підсистеми верхніх рівнів.

Частина 3 містить три множини  $\{\Sigma_{qk_1}\}, \{Opt_{qk_1}\}, \{J_{qk_1}\}$ ; проєктори першого рівня  $Pr_1$ , що звужують ці множини до підмножин  $\{\Sigma_{qk}\}, \{Opt_{qk}\}, \{J_{qk}\}$  допустимих елементів; проєктори  $Pr_2$  другого рівня, що вибирають з числа допустимих претенденти на оптимальні елементи. Для конкретного виду  $I_q$  і потрібного значення  $I_{qk}$ , що задається вище, проєктори  $Pr_1, Pr_2$  задають елементи  $J_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk}$  частини 4, де в результаті РП  $\{\beta_{qkn}\}$  отримують оптимальна по  $J_{qk}$  модель  $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$ . У

підсистемі частини 2 на реальному об'єкті  $\Sigma_\infty$  або його моделі  $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$  оцінюється значення критерію  $I_{qk}$  для  $k$ -й структури БАСІ, і якщо воно не задовольняє необхідному, то в одному з проєкторів  $Пр_2$  відбувається зміна претендента. Знову повторюється процес  $\{\beta_{qkn}\}$  і так до виконання умови, що  $I_{qk}$  буде не гірше необхідного, або до закінчення процесу перебору всіх претендентів.

При зміні  $I_{qk}$ , в частинах 4 та 5 можливі зміни структури і параметрів підсистеми нижнього рівня. У частинах 3 та 4 має місце композиція двох РП  $\{\beta_{qkn}\}$  по  $n$  і  $\{J_{qk}\}$  по  $k$ , що відповідає визначенню БАСІ.

Частина 2 містить реальний об'єкт  $\Sigma_\infty$ , його оптимізатор  $Opt_u I_q$ , множину  $\{I_q\}$  і проєктор  $Пр$ , що визначає (на основі значень  $I_{qk}$  і  $\Lambda$ ) вид  $I_q$  критерію  $I_{qk}$ . Сигнал  $x$  з виходу об'єкта  $\Sigma_\infty$  надходить в підсистему нижнього рівня, з виходу якої його оцінка  $\hat{x}$  потрапляє в системи ідентифікації і управління. Оптимізатор  $Opt_u I_{qk}$  на основі інформації  $\Sigma_{qk}, \beta_{qk}, I_{qk}, \hat{x}$  виробляє керуючий вплив  $u$ , що надходить на об'єкт або його модель (на стадії пошуку оптимальних елементів системи). Якщо після закінчення РП  $\{\beta_{qk}\}$  по  $k$  оптимальне значення  $I_q$  не задовольняє систему частини 1, то з системи верхнього рівня може надійти команда в проєктор  $Пр$  на зміну по  $q$  виду функціоналу  $I_q$ . Крок по  $q$  призводить до повторення кроків по  $k$ , а  $k$  по  $n$  в МАСІ, тобто в частинах 1-4 має місце композиція з трьох РП, що відповідає визначенню самоорганізуючої системи (СС) (табл.1.1).

Глибокий зворотній зв'язок за критеріями від  $\Lambda$  до  $I$ , від  $I$  до  $J$ , від  $J$  до  $J_\phi$ , оптимізуючий і цілеорієнтує структуру і параметри підсистеми всіх рівнів, здійснює регуляризцію рішення в широкому сенсі.

**Приклад 1.3.** Пояснимо ефект регуляризації таким прикладом. Маємо графік  $y(t)$  (рис.1.4), заданий на інтервалі  $[0, t_0]$ ,  $t_0=T$ , який відображає невідому досліднику закономірність

$$y(t) = \beta_0^* + \beta_1^* t + \beta_2^* \sin \omega t + \varepsilon(t),$$

де  $\omega = 2\pi / T$ ,  $\varepsilon(t)$  - досить мала складова неврахованих ефектів в  $\Sigma_{\infty}$ . Нехай множина  $\{Opt_{qk}\}$  складається з одного методу найменших квадратів (МНК), для якого вектор  $\alpha$  відсутній, а множина  $\{\Sigma_{qk}\}$  складена з трьох моделей:

$$\Sigma_{q1} : \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t; \Sigma_{q2} : \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2;$$

$$\Sigma_{q3} : \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2 + \hat{\beta}_3 t^3.$$

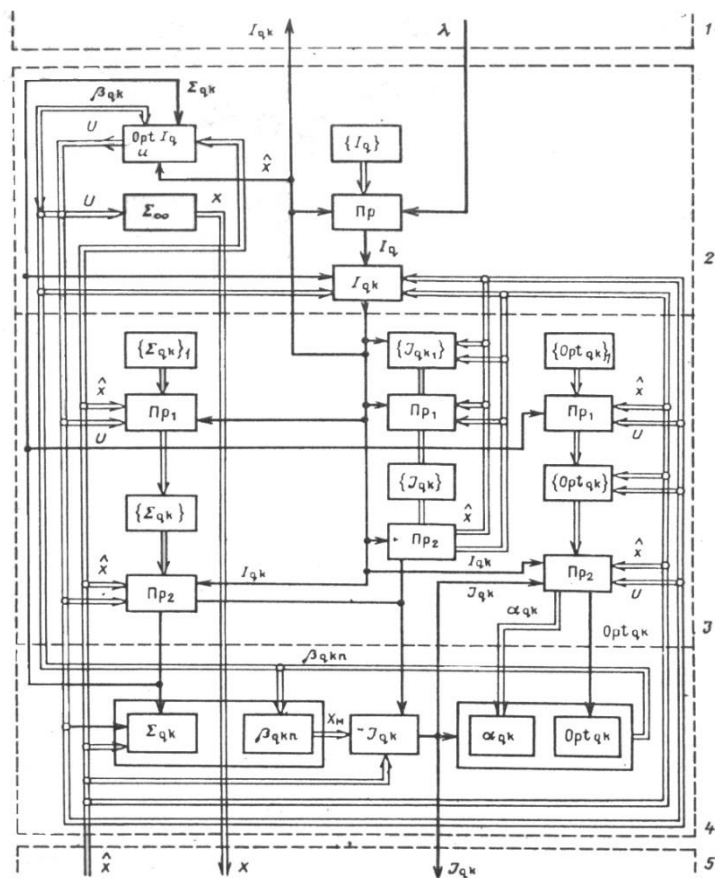


Рис.1.3 Функціональна схема багатократно адаптивної підсистеми ідентифікації

Критерій  $I = |y(t_0 + \tau) - \hat{y}t_0 + \tau|$ , що характеризує точність прогнозу, фізично не може бути реалізованим, тому що на практиці графік  $y(t)$  відомий тільки на інтервалі  $t \in [0, t_0]$ . Розіб'ємо інтервал  $[0, t_0]$  на два підінтервала  $[0, T - \tau_i]$  і  $[T - \tau_i, T]$ ,  $i = 1, 2$ . На першому інтервалі по МНК знайдемо  $\beta$  для моделей  $\{\Sigma_{q1}\}$ , на кінці другого перевіримо моделі за оцінкою  $\hat{I}$  критерію  $I$ :

$$\hat{I} = |y(t_0) - \hat{y}(t_0)|.$$

Таблиця 1.3

$\{\Sigma\}$	$\tau_i$	$\hat{I}$	Номер точки, що прогнозується	$I$	Номер точки, що прогнозується
$\Sigma_1$	0.2	0.7	1	1.4	2
$\Sigma_2$	0.2	1.8	3	3.6	4
$\Sigma_3$	0.2	0.2	5	0.4	6
$\Sigma_3$	0.5	5	7	6.2	8
$\Sigma_2$	0.5	5	9	6.2	10
$\Sigma_1$	0.5	0.2	11	0.3	12

Припустимо, що якщо  $\tau_i$  дорівнює  $\tau$  прогнозу, то із малості оцінки критерію  $\hat{I}$  слідує малість основного критерію  $I$ . У табл. 1.3 наведені значення критеріїв  $\hat{I}$  і  $I$  для  $\tau_1 = 0,2T$ ,  $\tau_2 = 0,5T$ , а також номери прогнозуючих точок на графіку (рис. 1.4). Як видно з рис.1.4 і табл. 1.3, для  $\tau = 0,2T$  оптимальною і по  $\hat{I}$ , і по  $I$  буде модель  $\Sigma_3$ , для  $\tau = 0,5T$  по двом критеріям -  $\Sigma_1$ . Застосування оптимальної за  $\hat{I}$  і  $I$  для  $\tau = 0,2T$  моделі  $\Sigma_3$  для прогнозу на  $\tau = 0,5T$  (точка 13 на графіку) призводить до різкого зростання  $I$ . Ефект регуляризації полягає в тому, що за одних і тих же даних, чим більше  $\tau$ , тим більш просту модель обирають за критерієм  $\hat{I}$ . Так як в силу неточності оцінок  $\hat{\beta}$  і самої структури  $\Sigma$  моделі для великих ступеней  $i$  поліному та великих  $\tau$  значеннях неточних компонент  $\beta_i(t + \tau)^i$  можуть вносити значну похибку (точка 13) прогнозу процесу  $y(t)$  по оцінці  $\hat{y}(t)$ . Тому критерій  $\hat{I}$  відкидає ці елементи для  $\tau = 0,5T$ .

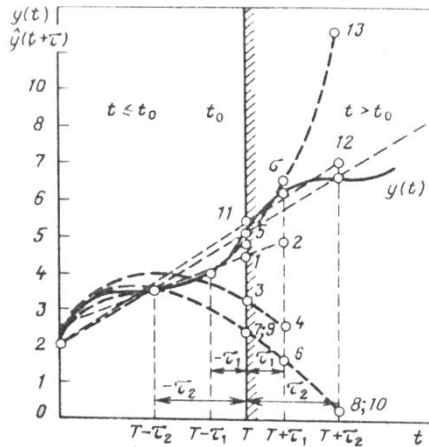


Рис. 1.4. Крива  $y(t)$  (суцільні лінії) та її прогнозуючі моделі (пунктирні лінії), які отримані для різноманітних навчальних  $[0, T - \tau_i], i = 1, 2$  і повірочних  $[T - \tau_i, T]$  вибірок даних

На якість прогнозу буде істотно впливати метод  $Opt$  і його параметри  $\alpha$ . Додатковий перебір в підмножині  $\{Opt_{q,k}, \alpha_{qk}\}$  за критерієм  $\hat{I}$  дозволяє вибрати оптимальну в розумінні  $I$  пару  $\{Opt^*, \alpha^*\}$ .

При застосуванні звичайного методу регуляризації, що полягає у введенні стабілізуючої добавки  $\alpha$  [26] в критерій МНК  $J = \varepsilon^T \varepsilon + \alpha(\hat{\beta} - \hat{\beta}_a)^T(\hat{\beta} - \hat{\beta}_a)$ , за відповідних значень  $\alpha$  можуть бути отримані аналогічні результати. Але не маючи критерію  $\hat{I}$ , невідомо, як вибрати ваги  $\alpha$  і як задати апіорні значення  $\beta_0$  вектору  $\beta$  параметрів моделі  $\Sigma$ , тоді як в класі БАСІ вони вибираються за умови

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{(\alpha, \beta)} \hat{I}.$$

Багатократно адаптивні системи ідентифікації мають більш широкі можливості регуляризації в порівнянні зі звичайними. Ефективність БАСІ очевидна настільки, наскільки очевидна нерівність

$$\left. \inf I_q(\Sigma, Opt, \alpha, u) \right|_{\beta = \arg \min J} < \left. \inf I_q(u) \right|_{\substack{\Sigma = const \\ (Opt, \alpha) = const \\ \beta = \arg \min J}}, \quad (1.33)$$

де права частина відповідає системам мінімізації  $I_q$  зі звичайним ідентифікатором (тільки частина 4 схеми на рис. 1.3), а ліва - системам з БАСІ- ідентифікатором (частини 2, 3, 4). Якщо  $I_q$  не враховує втрат на пошук  $\inf I_q$  (як у прикладі прогнозу), то нерівність строга. Якщо враховує, то для великої розмірності елементів  $\Sigma, Opt, \alpha$  і поганій їх впорядкованості проекторами  $Pr_1, Pr_2$  нерівність може не виконуватися. У таких системах порушено принцип раціонального ускладнення. Ускладнення (розширення розмірності елементів) багаторівневої системи з БАСІ-ідентифікатором повинно бути таким, щоб нерівність (1.33) не послаблювалася, а посилювалася. Тільки таке ускладнення доцільне.

#### *Контрольні запитання*

1. В чому полягає системний аналіз проблеми ідентифікації?
2. Визначити основні вимоги до математичної моделі.
3. Назвіть основні причини потреби цілеорієнтованої математичної моделі.
4. Визначити, що називається системною ідентифікацією в загальному вигляді.
5. За рахунок чого забезпечується необхідна якість розв'язання задачі ідентифікації?
6. Наведіть класифікацію систем ідентифікації.
7. В чому полягає багаторівнева декомпозиція систем?
8. Поясніть призначення основних елементів системи ідентифікації.
9. Наведіть структурну схему цілеорієнтованої системи ідентифікації та поясніть призначення кожної з її складових.

10. Сформулюйте принцип непротирічності критеріїв та дайте його аналітичний запис.
11. Поясніть за рис.1.3 структуру і принцип роботи БАСІ.
12. За табл.1.3 і рис.1.4 поясніть як відбувається навчання БАСІ на задачу прогнозу.

*Література до розділу 1:*

1. Калман Р., Фалби П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем.
2. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Под ред. Н.Д.Егунова-М.Изд-во МГТУ им. Н.С. Баумана, 2000,748 с.
3. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем.-М.: Энергоатомиздат.1987-200с.
4. Любич Ю.И., Майстровський Г.Д. Общая теория релаксационных процессов // Успехи мат.наук, 1970. № 1, с.57-112.
5. Сильвестров А.Н., Папченко О.М. Многократно адаптивные системы идентификации. М.:, 1983.-150с.
6. Сабер Ж. Линейный регрессионный анализ.М: Мир, 1980.
7. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Основы управления технологическими процессами.М.: Наука, 1980
8. Саридис Дж. Самоорганизующи стохастические системы управления. М.: Наука, 1980.
9. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.
10. Костюк В.И., Сильвестров А.Н. Асимптотическая инвариантность многократно адаптивных систем // Теория инвариантности и ее применение..К.: Наукова думка, 1979.с.155-167 (тр. V Всесоюзного совещания)
11. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.К.: Техника, 1975.
12. Гроп Д. Методы идентификации систем.М.: Мир, 1979.
13. Сейдж Е.П., Мэлса Дж. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
14. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз.1963.

15. Ейкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.:Мир,1975.
16. Шин В.И. Субоптимальный алгоритм оценки состояния и параметров многомерных непрерывных нелинейных систем // Автоматика и телемеханика 1984, № 1 с.101-106.
17. Соловников В.В., Матвеев П.С.. Расчет оптимальных систем автоматического управления при наличии помех. М.: Машиностроение, 1973.
18. Кашин Г.М., Федоренко И. Автоматическое управление продольным движением самолета. М.: Машиностроение, 1974.
19. Математические основы теории автоматического управления / Под ред . Б.К.Чемоданова. М.: Высшая школа, 1977, т.1.
20. Костюк В.И., Сильвестров В. Принцип многократной адаптивности // Достижения и перспективы развития тех. кибернетики. К.: Изд-во РДИТП, 1975, т.1.с.65-69 (тр. III Всесоюзной междуниверситетской НТК).
21. Круг Г.К., Сосулин Ю.А., Фатуев В.А. Планирование эксперимента в идентификации и экстраполяции. М.: Наука, 1977.
22. Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977.
23. Маркова Е.В., Лысенков В.Н. Комбинированные планы в задачах многофакторного эксперимента. М.: Наука, 1979.
24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.



## Розділ 2. Математичні моделі змінних стану об'єкта ідентифікації

### 2.1. Моделі змінних, як стаціонарні випадкові процеси

#### 2.1.1. Основні поняття

Стаціонарний процес  $[x_k(t)], -\infty < t < \infty$  - це сукупність функцій, які можна охарактеризувати імовірнісною структурою. Кожна окрема функція  $x_k(t)$ , де  $t$  - змінна, а  $k$  фіксоване, називається вибірковою функцією. Із практичної точки зору вибірккову функцію (або деякий відрізок вибіркової функції скінченної довжини) можна вважати спостережуваним результатом окремого експерименту. Можливе число експериментів визначається вибіркоvim простором індексів  $k$ . Для будь-якого  $N$  і будь-яких фіксованих моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_N$  значення процесу  $x_k(t_1), x_k(t_2), \dots, x_k(t_N)$  являють собою  $N$  випадкових величин, що залежать від індексу  $k$ . Передбачається, що для будь-якого  $x$  існує  $N$ -вимірна щільність ймовірності.

Окрема вибірккова функція  $x_k(t)$  випадкового процесу не характеризує випадковий процес  $[x_k(t)]$  у цілому.

Розглянемо два довільних випадкових процеси  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$ . У першу чергу являють інтерес середні значення ансамблю у довільний фіксований момент часу  $t$ , де  $x_k(t)$  і  $y_k(t)$  - випадкові величини від аргументу  $k$ . Такі середні значення визначаються формулами:

$$\mu(t) = M[x(t)], \mu(t) = M[y(t)]. \quad (2.1)$$

Загалом кажучи, ці середні значення не залежать від часу і повинні оцінюватися окремо для кожного моменту  $t$ . Тому для  $t_1 \neq t_2$  маємо:

$$\mu(t) = \mu(t), \mu(t) = \mu(t) \quad (2.2)$$

Наступні важливі статистичні характеристики - це кореляційні функції, визначені для довільних фіксованих моментів часу  $t_1 = t$  і  $t_2 = t + \tau$ :

$$\begin{aligned} C(t, t + \tau) &= M[(x(t) - \mu(t))(x(t + \tau) - \mu(t + \tau))]; \\ C(t, t + \tau) &= M[(y(t) - \mu(t))(y(t + \tau) - \mu(t + \tau))]; \quad (2.3) \\ C(t, t + \tau) &= M[(x(t) - \mu(t))(y(t + \tau) - \mu(t + \tau))]. \end{aligned}$$

У загальному випадку ці величини різні для різних комбінацій  $t_1$  і  $t_2$ . Зазначимо, що для  $\tau = 0$  ( $t_1 = t_2 = t$ ):

$$\begin{aligned} C(t, t + \tau) &= M[(x(t) - \mu(t)) ] = \sigma(t); \\ C(t, t + \tau) &= M[(x(t) - \mu(t)) ] = \sigma(t); \quad (2.4) \\ C(t, t + \tau) &= M[(x(t) - \mu(t))(y(t + \tau) - \mu(t + \tau))] = C(t). \end{aligned}$$

Отже, кореляційні функції  $C_{xx}(t, t)$  і  $C_{yy}(t, t)$  співпадають зі звичайними дисперсіями процесів  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$  у фіксований момент  $t$ , у той час як  $C_{xy}(t)$  представляє собою кореляцію випадкових величин  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$ .

За ансамблем реалізацій можна визначити й інші статистичні характеристики, що залежать від трьох і більше моментів часу. Тим самим імовірнісна структура випадкових процесів буде описуватися більш детально. Якщо  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$  мають для фіксованого моменту  $t$  двовимірний гаусовий розподіл, то кожна з величин  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$  теж підкоряється гаусовому розподілу. У цьому випадку приведені вище середні значення і коваріаційні функції повністю описують імовірнісну структуру процесу.

Якщо середні значення  $\mu_x(t)$  і  $\mu_y(t)$  разом із кореляційними функціями  $C_{xx}(t, t + \tau)$ ,  $C_{yy}(t, t + \tau)$  і  $C_{xy}(t, t + \tau)$  приймають однакові значення для всіх фіксованих значеннях  $t$  (тобто не залежать від вибору початку відліку), то випадкові процеси  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$  називаються слабо стаціонарними. Якщо можливі розподіли, пов'язані з  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$ , не залежать від вибору початку відліку часу, то такі процеси називаються строго стаціонарними. Оскільки середні значення і кореляційні функції визначаються тільки одновимірними і двовимірними функціями розподілу, то звідси вимога, щоб клас строго стаціонарних випадкових процесів входив у клас слабо стаціонарних випадкових процесів. Однак у випадку гаусових випадкових процесів слабка стаціонарність зумовлює сильну, оскільки всі характеристики цих процесів визначаються середнім значенням і кореляційною функцією. Отже, для гаусових випадкових процесів ці поняття стаціонарності збігаються.

### 2.1.2. Кореляційні функції змінних стану

Для стаціонарних випадкових процесів  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$  середні значення постійні і не залежать від часу  $t$ , тобто для всіх  $t$

$$\mu = M[x(t)] = \int x p(x) dx, \quad \mu = M[y(t)] = \int y p(y) dy, \quad (2.5)$$

де  $p(x)$  і  $p(y)$  - щільності імовірності випадкових величин  $x_k(t)$  і  $y_k(t)$  відповідно. Кореляційні функції стаціонарних процесів також не залежать від  $t$ .

Визначимо їх для довільних фіксованих  $t$  і  $\tau$ :

$$\begin{aligned} R(\tau) &= M[x(t)x(t + \tau)], \\ R(\tau) &= M[y(t)y(t + \tau)], \\ R(\tau) &= M[x(t)y(t + \tau)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

де замість  $C$  використовується символ  $R$  для того, щоб відрізнити ці величини від кореляційних функцій, визначених формулами (2.3). При не нульових середніх  $R$  відмінні від  $C$ . Величини  $R_{xx}(\tau)$  і  $R_{yy}(\tau)$  називаються автокореляційними функціями процесів  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$  відповідно, а  $R_{xy}(\tau)$  називається взаємною кореляційною функцією  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$ .

Для того, щоб  $R_{xx}(\tau)$  була кореляційною функцією слабо стаціонарного випадкового процесу  $[(x_k(t))]$ , необхідно і достатньо, щоб  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$  і  $R_{xx}(\tau)$  була обов'язково визначеною функцією.

Можна також показати, що  $R_{xx}(\tau)$  - неперервна функція від  $\tau$ , якщо вона неперервна у нулі. Аналогічно  $R_{xy}(\tau)$  - неперервна функція у всіх точках  $\tau$ , якщо  $R_{xx}(\tau)$  і  $R_{yy}(\tau)$  неперервні в нулі.

Для двох стаціонарних випадкових процесів  $[(x_k(t))]$  і  $[(y_k(t))]$  спільна щільність імовірності  $p(x_1, x_2)$  пари випадкових величин  $x_1 = x_k(t)$  і  $x_2 = x_k(t + \tau)$  не залежить від  $t$ . Спільна щільність імовірності  $p(y_1, y_2)$ , що відноситься до пари випадкових величин  $y_1 = y_k(t)$  і  $y_2 = y_k(t + \tau)$  також не залежить від  $t$ . Цю ж властивість має спільна щільність імовірності  $p(x_1, y_2)$ , що характеризує випадкові величини  $x_1 = x_k(t)$  і  $y_2 = y_k(t + \tau)$ . У термінах цих щільностей маємо:

$$R(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} x x p(x, x) dx dx,$$

$$R(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} y y p(y, y) dy dy,$$

$$R(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} x y p(x, y) dx dy. (2.7)$$

Для довільних  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  кореляційні функції  $C$  пов'язані з кореляційними функціями  $R$  співвідношеннями:

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2, C_{yy}(\tau) = R_{yy}(\tau) - \mu_y^2,$$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \quad (2.8)$$

Отже, кореляційні функції збігаються із кореляційними, якщо середні значення дорівнюють нулю. Зазначимо, що за визначенням, два стаціонарних випадкових процеси не корельовані, якщо  $C_{xy}(\tau) = 0$  для всіх  $\tau$ . У силу формул (2.8) це має місце, якщо  $R_{xy}(\tau) = \mu_x \mu_y$  для всіх  $\tau$ . Отже, якщо  $R_{xy}(\tau) = 0$ , два процеси не корельовані тільки тоді, коли хоча б одне із середніх  $\mu_x$  або  $\mu_y$  дорівнює нулю.

Із припущення стаціонарності витікає, що кореляційні функції  $R_{xx}(\tau)$  і  $R_{yy}(\tau)$  - парні функції від  $\tau$ , тобто

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau), R_{yy}(\tau) = R_{yy}(-\tau). \quad (2.9)$$

У той же час взаємна кореляційна функція не має властивості парності або непарності, але задовольняє співвідношенню:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau). \quad (2.10)$$

Кореляційні властивості стаціонарних випадкових процесів  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$  описуються чотирма функціями  $R_{xx}(\tau)$ ,  $R_{yy}(\tau)$ ,  $R_{xy}(\tau)$  і  $R_{yx}(\tau)$ , які можна розрахувати тільки для значень  $\tau \geq 0$ , оскільки зі співвідношень (2.9) і (2.10) легко одержати їхні значення для  $\tau < 0$ .

### ***Приклади кореляційних функцій***

У табл. 2.1 наведено приклади коваріаційних функцій, що знаходять застосування в дослідженнях змінних об'єкта ідентифікації.

**Приклад 2.1** Кореляційна функція гармонічної змінної стану

Нехай  $[x_k(t)] = [X \sin[2\pi f_0 t + \theta(k)]]$  - гармонічний процес, причому  $X$  і  $f_0$  - постійні, а  $\theta(k)$  - випадкова величина із рівномірною

щільністю  $p(\theta)$ , заданою на  $(0, 2\pi)$ . Знайдемо його кореляційну функцію  $R_{xx}(\tau)$ .

Тут для будь-якого фіксованого  $t$  випадкові величини мають вигляд

$$x_k(t) = [X \sin[2\pi f t + \theta(k)] = x_1(\theta),$$

$$x_k(t + \tau) = [X \sin[2\pi f(t + \tau) + \theta(k)] = x_1(\theta),$$

За формулою (2.6) отримаємо

$$R_{xx}(\tau) = M[x_k(t)x_k(t + \tau)] = M[x_1(\theta)x_2(\theta)]$$

де  $p(\theta) = 1/(2\pi)$  при  $0 \leq \theta \leq \pi$  і  $p(\theta) = 0$  в інших випадках.

Тому величина

*Таблиця 2.1.*

**Кореляційні функції, що часто застосовуються в теоретичних дослідженнях**

Тип сигналу	Коваріаційна функція
1	2
Сталий	$R(\tau) = c$
Гармонійний	$R(\tau) = \frac{x}{2} \cos 2\pi f \tau$
Білий шум	$R(\tau) = a\delta(\tau)$
Низькочастотний білий шум	$R(\tau) = aB \left( \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau} \right)$
Обмежений за $\omega$ білий шум	$R(\tau) = aB \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau} \cos 2\pi f \tau$
Експоненційний	$R(\tau) = e^{-\tau}$
Експоненційно-косинусоїдний	$R(\tau) = e^{-\tau} \cos 2\pi f \tau$
Експоненційно-косинусоїдно-синусоїдний	$R(\tau) = e^{-\tau} [a \cos 2\pi f \tau + b \sin 2\pi f \tau]$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{x^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_0 t + \theta) \sin[2\pi f_0(t + \tau) + \theta] d\theta = \frac{x^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$$

дає коваріаційну функцію стаціонарного випадкового гармонійного процесу.

### **Приклад 2.2** Кореляційна функція телеграфного сигналу

Розглянемо фізичний експеримент, що породжує випадковий телеграфний процес  $[x_k(t)]$ , що являє собою сукупність прямокутних хвиль, які набувають два значення ( $c$  і  $-c$ ), причому зміни знаку усередині інтервалу  $(t, t + \tau)$  відбуваються у випадковій і незалежні моменти часу із інтенсивністю  $\lambda$ . Припустимо також, що події усередині інтервалу  $(t, t + \tau)$  не залежать від подій, що відбуваються поза цим інтервалом. Визначимо подію  $A_n$ :

$A_n$  це = Подія, коли усередині інтервалу  $(t, t + \tau)$  відбувається рівно  $n$  змін знака. Такий фізичний експеримент описується пуассонівським розподілом, в якому ймовірність події  $A_n$  дорівнює:

$$P(A_n) = \frac{\lambda(|\tau|)^n}{n!} e^{-\lambda|\tau|}.$$

Знайдемо коваріаційну функцію сигналу  $[x_k(t)]$ . Коваріаційна функція розраховується у такий спосіб. Кожний окремий добуток  $x_k(t) x_k(t + \tau)$  дорівнює або  $c^2$ , якщо  $x_k(t)$  і  $x_k(t + \tau)$  мають однакові знак, або  $-c^2$ , якщо їхні знаки протилежні. Сумарна ймовірність того, що цей добуток є  $c^2$ , дорівнює сумі  $P(A_0) + P(A_2) + P(A_4) + \dots$ , а сумарна ймовірність того, що цей добуток є  $-c^2$ , дорівнює сумі

$$P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) + \dots$$

Отже,

$$R_{xx} = M[x_k(t)x_k(t + \tau)] = c^2 \sum_{n=0}^m (-1)^n P(A_n) = \\ c^2 e^{-\alpha|\tau|} \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(\alpha|\tau|)^n}{n!} = c^2 e^{-2\alpha|\tau|}.$$

**Приклад 2.3** Кореляційна функція суми двох стаціонарних процесів

Нехай випадковий процес  $[y_k(t)]$  дорівнює сумі двох стаціонарних випадкових процесів  $[x_{1,k}(t)]$  і  $[x_{2,k}(t)]$ . Будь-яка його вибірка функція має вигляд

$$y_k(t) = a_1 x_{1-k}(t) + a_2 x_{2,k}(t),$$

де  $a_1, a_2$  – сталі. Припустимо також, що  $[x_{1,k}(t)]$  і  $[x_{2,k}(t)]$  можуть корелювати між собою. Розрахуємо кореляційну функцію  $R_{yy}(\tau)$ :

$$R_{yy}(\tau) = M[y_k(t)y_k(t + \tau)] = \\ = M[(a_1 x_{1,k}(t) + a_2 x_{2,k}(t))(a_1 x_{1,k}(t + \tau) + a_2 x_{2,k}(t + \tau))] = \\ = a_1^2 R_{x_1 x_1}(\tau) + a_1 a_2 [R_{x_1 x_2}(\tau) + R_{x_2 x_1}(\tau)] + a_2^2 R_{x_2 x_2}(\tau).$$

Отже, для визначення коваріаційної функції суми потрібно знати коваріаційні функції окремих процесів, а також їх взаємну коваріаційну функцію.

### ***Некорельовані залежні випадкові величини***

Нехай  $x$  та  $y$  - випадкові величини виду  $x = \cos \varphi$  і  $y = \sin \varphi$ , де  $\varphi$  - випадкова величина, розподілена рівномірно на  $(0, 2\pi)$ . У цьому випадку існує зв'язок між  $x$  та  $y$ , оскільки  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Тому  $p(x, y) \neq p(x)p(y)$ , що говорить про статистичну залежність між  $x$  і  $y$ . Однак коваріація  $x$  і  $y$  дорівнює нулю:

$$C = M[xy] - M[x]M[y] = M[\cos \varphi \sin \varphi] - M[\cos \varphi]M[\sin \varphi] = \frac{1}{2} M[\sin 2\varphi] = 0.$$

Отже,  $x$  і  $y$  не корельовані.



### Нормована кореляційні функції сигналів

Для взаємної коваріаційної функції справедлива нерівність

$$|R_{xy}(\tau)| \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0). \quad (2.11)$$

Розглядаючи  $x(t) - \mu_x$  і  $y(t + \tau) - \mu_y$  замість  $x(t)$  і  $y(t + \tau)$ , одержуємо нерівність для взаємних кореляційних функцій:

$$|C_{xy}(\tau)| \leq C_{xx}(0)C_{yy}(0). \quad (2.12)$$

Зазначимо, що

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0), \quad |C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0). \quad (2.13)$$

Тому максимальні значення  $R_{xx}(\tau)$  і  $C_{xx}(\tau)$  досягаються в  $\tau = 0$  і дорівнюють відповідно середньому квадрату й дисперсії процесів:

$$R_{xx}(0) = M[x_k^2(t)] = \psi_x^2,$$

$$C_{xx}(0) = \sigma_x^2,$$

$$R_{yy}(0) = M[y_k^2(t)] = \psi_y^2. \quad (2.14)$$

Отже, нерівність (2.12) можна записати наступним чином:

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2 \quad (2.15)$$

Визначимо тепер коефіцієнт кореляції (нормовану взаємну кореляційну функцію)

$$r_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.16)$$

який для всіх  $\tau$  задовольняє нерівність

$$-1 \leq r_{xy}(\tau) \leq 1. \quad (2.17)$$

Якщо хоча б одна з величин  $\mu_x$  або  $\mu_y$  дорівнює нулю,

$$r(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.18)$$

тому що у цьому випадку  $C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ . Функція  $r_{xy}(\tau)$  характеризує ступінь лінійної залежності між  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$  для заданого зсуву  $\tau$  процесу  $[y_k(t)]$  стосовно процесу  $[x_k(t)]$ . По суті це – узагальнення коефіцієнта кореляції, що використовується у класичній статистиці.

### **Взаємна кореляційна функція за наявності запізнення в об'єкті**

Нехай вхідний сигнал об'єкта являє собою стаціонарний випадковий процес  $x(t)$  і з нульовим середнім значенням. Припустимо, що вихідний сигнал  $y(t)$  також стаціонарний і має нульове середнє:

$$y(t) = \alpha x(t - \tau_0) + n(t) \quad (2.19)$$

Величина  $\alpha$  - це постійний коефіцієнт згасання, величина  $\tau_0 = d / c$  - постійне запізнювання, рівне частці від ділення відстані  $d$  на швидкість поширення сигналу  $c$ , а  $n(t)$  некорельований шум на виході із нульовим середнім.

У цій задачі взаємні кореляційні функції  $x(t)$   $y(t)$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= M[x(t)y(t+\tau)] = M[x(t)\{\alpha x(t+\tau-\tau_0) + n(t+\tau)\}] = \\ &= \alpha M[x(t)x(t+\tau-\tau_0)] = \alpha R_{xx}(\tau - \tau_0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Отже,  $R_{xy}(\tau)$  дорівнює кореляційній функції  $R_{xx}(\tau)$ , зсунутій на величину запізнювання  $\tau_0$  і помноженій на коефіцієнт затухання  $\alpha$ . Максимальне значення  $R_{xy}(\tau)$  припадає на  $\tau = \tau_0$ , так що

$$\max_{\tau} R_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau_0) = \alpha R_{xx}(0) = \alpha \sigma_x^2. \quad (2.21)$$

Знайшовши значення  $\tau_0$  за положенням максимуму і знаючи одну із величин (відстань  $d$  або швидкість поширення  $c\tau$ ) можна знайти іншу, тому що  $d = c\tau_0$ .

Вважаючи як і раніше, що  $x(t)$  і  $n(t)$  мають нульові середні значення, визначимо значення коефіцієнта кореляції для  $\tau = \tau_0$  за формулою (2.18):

$$r_{xy}(\tau_0) \frac{R_{xy}(\tau_0)}{\sigma_x \sigma_y} = \alpha \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \quad (2.22)$$

Тому, знаючи  $r_{xy}(\tau_0)$ , можна знайти коефіцієнт затухання  $\alpha$ :

$$\alpha = r_{xy}(\tau_0) [\sigma_y / \sigma_x]. \quad (2.23)$$

Отже, дисперсія  $y(t)$  при некорельованих  $x(t)$  і  $n(t)$  дорівнює:

$$\sigma_y^2 = M[y^2(t)] = \alpha^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (2.24)$$

Вона має дві складові: внесок  $x(t)$  в дисперсію  $y(t)$  і внесок  $n(t)$  у дисперсію  $y(t)$ , які відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sigma_x^2 &= r_{xy}^2 \sigma_y^2, \\ \sigma_n^2 &= (1 - r_{xy}^2) \sigma_y^2. \end{aligned} \quad (6.25)$$

## 2.2. Визначення спектрів сигналів

Функції спектральної щільності можна визначити трьома різними еквівалентними способами:

- а) за допомогою кореляційних функцій;
- б) за допомогою фінітного перетворення Фур'є;
- в) за допомогою фільтрації, піднесення у квадрат і усереднення.

### 2.2.1. Визначення спектрів за допомогою кореляційних функцій

Цей підхід дає двосторонню спектральну щільність, яка позначається  $S(f)$  і визначається для  $f \in (-\infty, \infty)$ .

Нехай існують кореляційна і взаємна кореляційні функції  $R_{xx}(\tau)$ ,  $R_{yy}(\tau)$  і  $R_{xy}(\tau)$ , що задані формулами (2.6). Припустимо далі, що інтеграли від їх абсолютних величин скінченні:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty.$$

На практиці ця умова завжди виконується для реалізацій скінченної тривалості. Тоді перетворення Фур'є функцій  $R(\tau)$  існує і визначається формулами:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad S_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau.$$

(2.26)

Величини  $S_{xx}(f)$  і  $S_{yy}(f)$  називаються функціями спектральної щільності процесів  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$  відповідно, або просто спектральними щільностями, а  $S_{xy}(f)$  називається взаємною спектральною щільністю  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$ .

Зворотні перетворення Фур'є від формул (2.26) дають відповідні кореляції:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df, \quad R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) e^{i2\pi f\tau} df,$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{i2\pi f \tau} df . \quad (2.27)$$

Для вирішення практичних задач доводиться допускати наявність в  $R(\tau)$  і  $S(f)$  дельта-функцій. Співвідношення (2.26), (2.27) називають формулами Вінера - Хінчина.

Із властивостей симетрії стаціонарних коваріаційних функцій, що описуються формулами (2.9), (2.10), витікає, що

$$\begin{aligned} S_{xx}(-f) &= S_{xx}^*(f) = S_{xx}(f), \quad S_{yy}(-f) = S_{yy}^*(f) = S_{yy}(f) \\ S_{xy}(-f) &= S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Отже, спектральні щільності  $S_{xx}(f)$  і  $S_{yy}(f)$  - дійсні і невід'ємні парні функції від  $f$ .

Спектральні співвідношення з формул (2.26) можна привести до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \\ S_{yy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_{yy}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Тоді зворотні перетворення матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} S_{xx}(f) \cos 2\pi f \tau df, \\ R_{yy}(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} S_{yy}(f) \cos 2\pi f \tau df \end{aligned} \quad (2.30)$$

Однобічні спектральні щільності  $G_{xx}(f)$  і  $G_{yy}(f)$ , де  $f \in [0, \infty]$ , визначаються формулами

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f), \quad G_{yy}(f) = 2S_{yy}(f). \quad 0 \leq f \leq \infty \quad (2.31)$$

Саме ці величини вимірюються на практиці за допомогою прямої фільтрації. Однак використання у математичних розрахунках функцій  $S_{xx}(f)$  і  $S_{yy}(f)$ , визначених на  $(-\infty, \infty)$ , і показникових функцій із уявним аргументом часто спрощує аналіз.

Однобічні спектральні щільності  $G_{xx}(f)$  і  $G_{yy}(f)$  зв'язані зі стаціонарними кореляційними функціями  $R_{xx}(f)$  і  $R_{yy}(f)$  співвідношеннями

$$G_{xx}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad G_{yy}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{yy}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad 0 \leq f \leq \infty \quad (2.32)$$

Їх зворотні перетворення мають вигляд:

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) \cos 2\pi f \tau df, \quad R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{yy}(f) \cos 2\pi f \tau df. \quad (2.33)$$

Зокрема, для  $\tau = 0$  отримаємо:

$$R_{xx}(0) = M[x^2(t)] = \psi_x^2 = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df, \quad R_{yy}(0) = M[y^2(t)] = \psi_y^2 = \int_0^{\infty} G_{yy}(f) df. \quad (2.34)$$

Однобічна взаємна спектральна щільність  $G_{xy}(f)$ , де  $f \in [0, \infty)$ , визначається подібно до (6.31):

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f), \quad 0 \leq f < \infty \quad (2.35)$$

В інших випадках  $G_{xy}(f) = 0$ . З формули (6.26) маємо

$$G_{xy}(f) = 2 \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = C_{xy}(f) - iQ_{xy}(f), \quad (2.36)$$

де  $C_{xy}(f)$  називається коспектральною щільністю (коспектром), а  $Q_{xy}(f)$  - квадратурною спектральною щільністю (квадратурним спектром). У термінах  $C_{xy}(f)$  і  $Q_{xy}(f)$  взаємна кореляційна функція має вигляд

$$R_{xy}(f) = 2 \int_0^{\infty} [C_{xy}(f) \cos 2\pi f \tau + Q_{xy}(f) \sin 2\pi f \tau] df. \quad (2.37)$$

Відмітимо, що  $C_{xy}(f)$  і  $Q_{xy}(f)$  визначаються через  $G_{xy}(f)$ , а не через  $S_{xy}(f)$ , а також, що для  $\tau = 0$

$$R_{xy}(0) = M[x(t)y(t)] = \int_0^{\infty} C_{xy}(f) df. \quad (2.38)$$

Величину  $R_{xy}(0)$  можна визначити, знаючи  $C_{xy}(f) = \text{Re}[G_{xy}(f)]$ .

Однобічну взаємну спектральну щільність можна представити в комплексній полярній формі:

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)}, \quad (2.39)$$

де модуль і фазовий кут визначаються формулами

$$|G_{xy}(f)| = \sqrt{C_{xy}^2(f) + Q_{xy}^2(f)}, \quad (2.40)$$

$$\theta_{xy}(f) = \arctg \frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)}. \quad (2.41)$$

Знаки членів  $C_{xy}(f)$  і  $Q_{xy}(f)$  можуть бути як додатними, так і від'ємними, і їхнім сполученням визначається квадрант, у якому розташовується фазовий кут. Ці знаки визначають також частоти, на яких функція  $y(t)$  випереджає  $x(t)$  або  $x(t)$  випереджає  $y(t)$ . Якщо реалізація  $y(t)$  випереджає  $x(t)$ , то це означає, що  $y(t) = x(t - \tau)$ , де  $\tau_0 > 0$  і  $Q(f) = 2\pi f \tau$ .

Аналогічно двостороння взаємна спектральна щільність у комплексній полярній формі має вигляд

$$S_{xy}(f) = |S_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)}, \quad (2.42)$$

де  $|S(f)| = |G(f)|/2$ .

З формули (2.36) витікає, що

$$C_{xy}(f) = 2 \int_0^{\infty} [R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] \cos 2\pi f \tau d\tau = C_{xy}(-f), \quad (2.43)$$

$$Q_{xy}(f) = 2 \int_0^{\infty} [R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau)] \sin 2\pi f \tau d\tau = -Q_{xy}(-f).$$



Тому  $C_{xy}(f)$ - дійсна парна функція  $f$ , а  $Q_{xy}(f)$  - дійсна непарна функція  $f$ . Отже,

$$C_{xy}(f) = \frac{1}{2}[G_{xy}(f) + G_{yx}(f)] = |G_{xy}(f)| \cos \theta_{xy}(f),$$

$$Q_{xy}(f) = \frac{i}{2}[G_{xy}(f) - G_{yx}(f)] = |G_{xy}(f)| \sin \theta_{xy}(f).$$

(2.44)

Таблиця 2.2.

**Функції спектральної щільності,  
живані в теоретичних дослідженнях**

Тип функції	Спектральні щільності
Постійна	$G_{xx}(f) = C^2 \delta(f)$
Гармонійна	$G_{xx}(f) = \frac{x^2}{2} \delta(f - f_0)$
Білий шум	$R_{xx}(f) = 2a, f \geq 0$
Низькочастотний білий шум	$G_{xx}(f) = a, 0 \leq f \leq B$
Обмежений за частотою білий шум	$G_{xx}(f) = a$ $0 \leq f_0 - (B/2) \leq f \leq f_0 + (B/2)$
Експоненціальна	$G_{xx}(f) = \frac{4a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
Експоненціально-косинусоїдна	$G_{xx}(f) = 2a \sum \pm \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 (f \pm f_0)^2}$
Експоненціально-косинусоїдно-синусоїдна	$G_{xx}(f) = 2a \sum \pm \frac{2ab + 4\pi c (f \pm f_0)}{a^2 + 4\pi^2 (f \pm f_0)^2}$

Спектральні характеристики стаціонарних випадкових процесів  $[x_k(t)]$  і  $[y_k(t)]$ , що описуються трьома функціями  $S_{xx}(f)$ ,  $S_{yy}(f)$  і

$S_{xy}(f)$  або чотирма  $S_{xx}(f)$ ,  $S_{yy}(f)$ ,  $C_{xy}(f)$  і  $Q_{xy}(f)$ , достатньо розраховувати тільки для  $f \geq 0$ , оскільки співвідношення (2.28) і (6.43) дозволяють обчислювати їх для  $f < 0$ . При виконанні операцій над спектральними щільностями, які включають дельта-функції з  $f = 0$ , краще вважати, що нижня межа інтегрування розуміється як межа ліворуч нуля. Зокрема, якщо  $R(\tau) = c^2$ , то  $G(f) = c^2 \delta(f)$ . У цій ситуації  $S(f)$  теж має вигляд  $S(f) = c^2 \delta(f)$ , тобто множник 2 у формулі (2.35) у випадку дельта-функції на  $f = 0$  відсутній. Це міркування не має сили для коваріаційних функцій, які містять дельта-функцію в  $\tau = 0$ , оскільки кореляційні функції визначені для всіх  $\tau$ . Саме тому  $R(\tau) = a \delta(\tau)$  відповідає як щільності  $S(f) = a$  для всіх  $f$ , так і  $G(f) = 2a$  для всіх  $f \geq 0$ .

У табл. 2.2 приводяться приклади функцій однобічної спектральної щільності, які застосовуються у дослідженнях сигналів об'єкта ідентифікації.

#### **Обмежений за частотою білий шум.**

За визначенням, обмежений за частотою білий шум - це стаціонарний випадковий процес із постійною спектральною щільністю вигляду

$$G(f) = \begin{cases} a, & 0 \leq f - (B/2) \leq f \leq f + (B/2); \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.45)$$

Тут  $f_0$  - центральна частота прямокутного фільтру з шириною смуги пропускання  $B$ . Процес цього вигляду називається також вузько смуговим білим шумом. За формулою (2.31) знаходимо

$$R_{xx}(\tau) = \int_{f_0 - (B/2)}^{f_0 + (B/2)} a \cos 2\pi f \tau df = aB \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (2.46)$$

У окремому випадку  $f_o=B/2$  процес називається низькочастотним білим шумом і має спектральну щільність вигляду

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} a, & 0 \leq a \leq B; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.47)$$

із коваріаційною функцією

$$R_{xx}(\tau) = aB \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau}. \quad (2.48)$$

Вузько смуговий білий шум, у тому числі і низькочастотний, має кінцевий середній квадрат вигляду

$$\int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = fB = R_{xx}(0). \quad (2.49)$$

Такою щільністю апроксимують спектри реальних сигналів.

Граничний випадок низькочастотного обмеженого за частотою білого шуму, що називається білим шумом, за визначенням, має спектр, рівний постійній величині для всіх частот. Такий процес на практиці зустрітися не може. Саме у разі білого шуму для  $f \geq 0$

$$G_{xx}(f) = a.$$

Тому  $S_{xx}(f) = (a/2)$  для будь-яких значень  $f$ :

$$R_{xx}(\tau) = (a/2) \delta(\tau), \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = \infty = R_{xx}(0).$$

Звідси видно, що білий шум має нескінченний середній квадрат. Такий чисто теоретичний білий шум не може бути гаусовим процесом, оскільки для коректного визначення гаусового процесу його середній квадрат повинен бути скінченним.

**Приклад 2.2:** Спектральна щільність гармонічного процесу.

Коваріаційна функція гармонічного процесу, описаного у прикладі 2.1, має вигляд:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau.$$

Підстановка у формулу (2.26) дає двосторонню спектральну щільність

$$S_{xx}(f) = \frac{X^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)],$$

що складається з двох дельта-функцій, локалізованих на  $f = f_0$  і  $f = -f_0$ . Тому одностороння спектральна щільність дорівнює

$$S_{xx}(f) = \frac{X^2}{2} \delta(f - f_0).$$

**Приклад 2.3:** Спектральна щільність телеграфного сигналу.

Телеграфний сигнал має коваріаційну функцію експоненційного вигляду  $R_{xx}(\tau) = c^2 e^{-2\lambda|\tau|}$ .

Підстановка у формулу (2.26) дає двосторонню спектральну щільність:

$$S_{xx}(f) = \frac{\lambda c^2}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}.$$

Тому одностороння спектральна щільність має вигляд

$$G_{xx}(f) = \frac{2\lambda c^2}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}.$$

Відмітимо, що

$$\int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = c^2 = R_{xx}(0).$$

**Приклад 2.4** Спектральна щільність суми двох процесів.

Коваріаційна функція суми двох стаціонарних випадкових процесів:

$$R_{yy}(\tau) = a_1^2 R_{x_1 x_1}(\tau) + a_2^2 R_{x_2 x_2}(\tau) + a_1 a_2 [R_{x_1 x_2}(\tau) + R_{x_2 x_1}(\tau)].$$

Спектральна щільність:

$$S_{yy}(f) = a_1^2 S_{x_1 x_1}(f) + a_1 a_2 [S_{x_1 x_2}(f) + S_{x_2 x_1}(f)] + a_2^2 S_{x_2 x_2}(f).$$

Проте  $S_{x_2 x_1}(f) = S_{x_1 x_2}^*(f)$  тому

$$S_{x_1 x_2}(f) + S_{x_2 x_1}(f) = 2\text{Re}[S_{x_1 x_2}(f)] = C_{x_1 x_2}(f).$$

Отже,  $S_{yy}(f)$  - дійсна функція і може бути записана у вигляді:

$$S_{yy}(f) = a_1^2 S_{x_1 x_1}(f) + a_1 a_2 C_{x_1 x_2}(f) + a_2^2 S_{x_2 x_2}(f)$$

Відповідна одностороння спектральна щільність має вигляд

$$G_{yy}(f) = a_1^2 G_{x_1 x_1}(f) + 2a_1 a_2 C_{x_1 x_2}(f) + a_2^2 G_{x_2 x_2}(f)$$

### 2.2.2. Визначення спектрів сигналів через перетворення Фур'є

Другий спосіб визначення спектральної щільності за своїм характером теж є математичним. Він заснований на фінітному перетворенні Фур'є реалізацій сигналу.

Розглянемо пару реалізацій  $x_k(t)$  і  $y_k(t)$  стаціонарних випадкових процесів  $[x(t)]$  і  $[y(t)]$ . Визначимо на кінцевому інтервалі часу  $0 < t < T$  функцію:

$$S_{xy}(f, T, k) = \frac{1}{T} X_k^*(f, T) Y_k(f, T), \quad (2.50)$$

де

$$X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad (2.51)$$

$$Y_k(f, T) = \int_0^T y_k(t) e^{-i2\pi f t} dt. \quad (2.52)$$

Величини  $X_k(f, T)$ ,  $Y_k(f, T)$  - це фінітні перетворення Фур'є реалізацій  $x_k(t)$ ,  $y_k(t)$  відповідно, а  $X_k^*(f, T)$  - величина, комплексно-спряжена  $X_k(f, T)$ . Такі перетворення за кінцевим інтервалом існують для реалізацій широкого класу випадкових процесів, тоді як перетворення Фур'є за нескінченним інтервалом зазвичай не існують, оскільки теоретично стаціонарний процес визначений на всій осі часу.

Поширена помилка полягає в тому, що за аналогією з періодичними процесами взаємну спектральну щільність визначають за формулою:

$$S_{xy}(f, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} S_{xy}(f, T, k).$$

Це визначення не підходить у разі стаціонарних випадкових процесів загального вигляду, оскільки при прямуванні  $T$  до  $\infty$  оцінка  $S_{xy}(f, T, \tau_0)$  величини  $S_{xy}(f, \tau_0)$  не покращується в статистичному сенсі. Пригадаємо тепер, що ліва частина залежить також від індексу  $\tau_0$ . Правильне визначення  $S_{xy}(f)$  дає наступний вираз:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} M[S_{xy}(f, T, k)]. \quad (2.54)$$

де  $M[S_{xy}(f, t, k)]$  - математичне сподівання, узятє за безліччю індексів  $K$ . Спектральна щільність  $S_{xx}(f)$  і  $S_{yy}(f)$  - це просто окремі випадки формули (2.54).

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M[S_{xy}(f, T, k)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = S_{xy}(f). \quad (2.55)$$

Зазначимо, що заміна  $S(f)$  на відповідні  $G(f)$  приводить до наступних формул:

$$G_{xy}(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M[X_k^*(f, T)]. \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} G_{xx}(f) &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M[|X_k(f, T)|^2], \\ G_{yy}(f) &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M[|Y_k(f, T)|^2] \end{aligned} \quad (2.57)$$

Для розрахунків за цими формулами застосовуються реалізовані на ЕОМ процедури швидкого перетворення Фур'є. На практиці довжина реалізації  $T$  завжди кінцева, оскільки неможливо отримати нескінченний набір реальних даних про об'єкт ідентифікації.

### 2.2.3. Взаємна спектральна щільність за наявності запізнення в об'єкті

Перш за все визначимо функцію когерентності

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}, \quad (2.58)$$

яка для будь-яких  $f$  задовольняє нерівності

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1. \quad (2.59)$$

Комплексна функція когерентності  $\gamma_{xy}(f)$  визначається формулою

$$\gamma_{xy}(f) = |\gamma_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)}, \quad (2.60)$$

де

$$|\gamma_{xy}(f)| = \sqrt{\gamma_{xy}^2(f)}, \quad (2.61)$$

а  $\theta_{xy}(f)$  – фазовий кут  $G_{xy}(f)$ .

Згідно формули (2.20) взаємна коваріаційна функція в задачі визначення запізнювання дорівнює

$$R_{xy}(\tau) = \lambda R_{xx}(\tau - \tau_0). \quad (2.62)$$

Підставивши у формулу (2.26), отримаємо двосторонню взаємну спектральну щільність

$$S_{xy}(\tau) = \lambda S_{xx}(f) e^{-i2\pi f \tau_0}. \quad (2.63)$$

Відповідна однобічна взаємна спектральна щільність має вигляд

$$G_{xy}(f) = \lambda G_{xx}(f) e^{-i2\pi f \tau_0}. \quad (2.64)$$

Тому відповідно формулі (2.39),

$$|G_{xy}(f)| = \lambda G_{xx}(f), \theta_{xy}(f) = 2\pi f \tau_0 \quad (2.65)$$

Отже, зміщення часу  $\tau_0$  бере участь тільки у фазовому куті  $\theta_{xy}(f)$ . Виміряне  $\theta_{xy}(f)$  дозволяє визначити зміщення часу, оскільки  $\theta_{xy}(f)$  – лінійна функція від  $f$  із нахилом, рівним  $2\pi\tau_0$ . Коефіцієнт затухання  $\lambda$  на всіх частотах дорівнює

$$\lambda = \frac{|G_{xy}(f)|}{G_{xx}(f)}. \quad (6.66)$$

Однобічна спектральна щільність переданого сигналу  $x(t)$  і прийнятого сигналу, дорівнюють відповідно  $G_{xx}(f)$  і  $G_{yy}(f)$ , де

$$G_{yy}(f) = G_{xx}(f) + G_{nn}(f). \quad (2.67)$$

Для будь-якого значення  $f$  функція когерентності дорівнює



$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} = \lambda^2 \frac{G_{xx}(f)}{G_{yy}(f)}. \quad (2.68)$$

Зазначимо, що  $G_{yy}(f)$  має дві складові - відповідно вклад  $x(t)$  у спектр  $y(t)$  і вклад  $n(t)$  у спектр  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} \lambda^2 G_{xx}(f) &= \gamma_{xy}^2(f) G_{yy}(f), \\ G_{nn}(f) &= [1 - \gamma_{xy}^2(f)] G_{yy}(f). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ці результати змістовніші в порівнянні з усередненими за всіма частотами результатами, приведеними в (2.25), де відсутня залежність від частоти.

З врахуванням виразу (2.67) для  $G_{yy}(f)$  функція когерентності набуває вигляду

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2(f) &= \frac{[\lambda^2 G_{xx}(f) + G_{nn}(f)] - G_{nn}(f)}{\alpha^2 G_{xx}(f) + G_{nn}(f)} = \\ &= \frac{G_{yy}(f) - G_{nn}(f)}{G_{yy}(f)} = 1 - \frac{G_{nn}(f)}{G_{yy}(f)}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

І тут очевидно, що  $\gamma_{xy}(f) \leq 1$  для всіх  $f$ , оскільки  $G_{nn}(f) \leq G_{yy}(f)$ .

### **Визначення положення максимуму.**

З формул (2.21) і (2.27) витікає, що максимум  $R_{xy}(\tau)$  дорівнює

$$R_{xy}(\tau)_{\max} = R_{xy}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{i2\pi f \tau_0} df. \quad (2.71)$$

Позначимо оцінки  $R_{xy}(\tau_0)$ ,  $S_{xy}(f)$  відповідно через  $R_{xy}(\tau_0)$ ,  $S_{xy}(f)$

$$S_{xy}(f) = |S_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)}. \quad (2.72)$$

Тоді рівняння (2.72) перепишемо у вигляді:

$$R_{xy}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{xy}(f)| e^{i[2\pi f \tau_0 - \theta(f)]} df = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{xy}(f)| \cos[2\pi f \tau_0 - \theta_{xy}(f)] df, \quad (2.73)$$

оскільки  $\hat{R}_{xy}(\tau_0)$  набуває тільки дійсних значень. Умова максимуму:

$$\frac{\partial R_{xy}(\tau_0)}{\partial \tau_0} = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi f) |S_{xy}(f)| \sin[2\pi f \tau_0 - \theta_{xy}(f)] df. \quad (2.74)$$

Оскільки  $\theta_{xy}(f) = 2\pi f \tau_0$ , отримуємо наближену формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi f) |S_{xy}(f)| [2\pi f \tau_0 - \theta_{xy}(f)] df = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $\tau_0$ , отримаємо, що

$$\tau_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f) |S_{xy}(f)| \theta_{xy}(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 |S_{xy}(f)| df}. \quad (2.75)$$

Використовуючи однобічну спектральну щільність  $\hat{G}_{xy}(f)$  замість двосторонніх  $\hat{S}_{xy}(f)$ , прийдемо до еквівалентної формули

$$\tau_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f) |G_{xy}(f)| \theta_{xy}(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 |G_{xy}(f)| df}. \quad (2.76)$$

### 2.3. Ергодичні і гаусові випадкові процеси, як моделі змінних стану

Розглянемо два слабо стаціонарних процеси  $x(t)$  і  $y(t)$  і дві їх довільні вибіркові функції  $X_k(t)$  і  $Y_k(t)$ . Ці стаціонарні випадкові

процеси називаються слабо ергодичними, якщо їх середні значення і коваріаційні (кореляційні) функції, які було визначено вище шляхом усереднювання ансамбля даних, можна обчислити за допомогою усереднювання за часом будь-якої пари вибірових функцій. Таким чином, початкова імовірнісна структура таких слабо стаціонарних випадкових процесів легко визначається за будь-якою парою реалізацій, і, отже, відпадає необхідність накопичення великого числа даних.

Наприклад, середні значення конкретних вибірових функцій  $x_k(t)$  і  $y_k(t)$ , обчислені шляхом усереднювання за часом, можна представити наступним чином:

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt, \mu_y(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_k(t) dt, \quad (2.77)$$

Бачимо, що результат не залежить від  $t$ , оскільки за  $t$  було виконано усереднювання. Проте у загальному випадку результат залежить від вибору конкретної вибіркової функції, що відмічено індексом  $k$ .

Взаємні кореляційні функції реалізацій  $x_k(t)$  і  $y_k(t+\tau)$ , обчислені шляхом усереднювання за часом, визначаються наступним виразом:

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau, k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - \mu_x(k)][y_k(t+\tau) - \mu_y(k)] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) y_k(t+\tau) dt - \mu_x(k) \mu_y(k) = R_{xy}(\tau, k) - \mu_x(k) \mu_y(k). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Коваріаційні і кореляційні функції мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau, k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - \mu_x(k)][x_k(t+\tau) - \mu_x(k)] dt = \\ &= R_{xx}(\tau, k) - \mu_x^2(k), \end{aligned}$$

$$C_{yy}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [y_k(t) - \mu_y(k)][y_k(t + \tau) - \mu_y(k)] dt = \quad (2.79)$$

$$= R_{yy}(\tau, k) - \mu_y^2(k).$$

Порівняємо ці величини з раніше визначеними середніми значеннями  $\mu_x$  і  $\mu_y$  та кореляційними функціями  $C_{xx}(\tau)$ ,  $C_{yy}(\tau)$ ,  $C_{xy}(\tau)$ , розрахованими шляхом усереднювання за ансамблем в припущенні стаціонарності процесів. Якщо отримаємо, що незалежно від значення  $k$

$$\mu_x(k) = \mu_x, \mu_y(k) = \mu_y,$$

$$C_{xx}(\tau, k) = C_{xx}(\tau), C_{yy}(\tau, k) = C_{yy}(\tau), C_{xy}(\tau, k) = C_{xy}(\tau), \quad (2.80)$$

то випадкові процеси  $x(t)$  і  $y(t)$  називаються слабо ергодичними. Якщо всі статистичні характеристики їх, визначені шляхом усереднювання за ансамблем (а не тільки середні значення і коваріаційні функції) збігаються з відповідними величинами, отриманими за допомогою усереднювання за часом, то такі випадкові процеси називаються строго ергодичними. Отже, строга ергодичність включає слабку, але не навпаки. Для гаусових випадкових процесів обидва поняття збігаються.

Для ергодичності процесу, перш за все, потрібно, щоб він був стаціонарним. Кожна вибіркova функція в рівній мірі представляє весь процес у вказаному вище сенсі, так що вибір якої-небудь конкретної реалізації для виконання усереднювання за часом не має ніякого значення. У разі ергодичних процесів  $x(t)$  і  $y(t)$  для визначення їх коваріаційної і взаємної коваріаційної функцій можна використовувати замість формули (2.6) наступні:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt,$$

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_k(t) y_k(t + \tau) dt, \quad (2.81)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) y_k(t + \tau) dt.$$

**Приклад 2.5.** Не ергодичний стаціонарний випадковий процес.

Наведемо простий приклад не ергодичного стаціонарного випадкового процесу  $x(t)$ , що складається з гармонійних вибірових функцій вигляду  $\{x(t)\} = \{X \sin[2\pi ft + \theta]\}$ .

Нехай амплітуди  $X_k$  і фазові кути  $\theta_k$  – випадкові величини, що набувають різних значень в різних реалізаціях.

Якщо  $\theta_k$  розподілені рівномірно, то характеристики процесу, обчислені шляхом усереднювання за ансамблем у фіксовані моменти часу, не залежать від часу; отже, процес стаціонарний. Проте характеристики, обчислені усереднюванням за часом окремих вибірових функцій, можуть і не збігтися. Наприклад, коваріаційна (або кореляційна) функція, обчислена за довільною вибірковою функцією, дорівнює:

$$C_{xx}(\tau, k) = \frac{X_k^2}{2} \sin 2\pi f \tau.$$

Оскільки  $X_k$  залежить від  $k$ , то  $C_{xx}(\tau, k) \neq C_x(\tau)$ . Отже цей випадковий процес не ергодичний.

Допустимо, що замість випадкових амплітуд  $|X_k|$  у визначенні процесу взяті не випадкові амплітуди, тобто незалежні від  $k$ . Тоді випадковий процес буде складатися з вибірових функцій вигляду

$$\{x_k(t)\} = \{X \sin[2\pi ft + \theta_k]\}.$$

Такий випадковий процес ергодичний, кожна його реалізація статистично еквівалентна будь-якій іншій реалізації з погляду операції усереднювання за часом.

### 2.3.1. Достатні умови ергодичності процесів

Відомо два класи ергодичних процесів. Перший складається із стаціонарних гаусових процесів з абсолютно безперервною спектральною щільністю, тобто в спектрі немає дельта-функцій,

відповідних нескінченним значенням щільності середнього квадрата на фіксованих частотах.

Другий клас ергодичних процесів (що входить в перший) - це стаціонарні гаусові марківські процеси; марківський процес - це процес, майбутні значення якого залежать тільки від одного безпосередньо попереднього значення. Коваріаційна функція стаціонарного гаусового марківського процесу має простий експоненціальний вигляд.

Достатні умови ергодичності довільного випадкового процесу такі.

1. Для слабкої ергодичності довільного випадкового процесу вистачає, щоб процес був слабо стаціонарним і його  $\mu_x(k)$  і  $C_{xx}(\tau, k)$ , обчислені усереднюванням за часом, були однаковими для всіх вибіркових функцій від  $k$ . Дійсно, за визначенням

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt.$$

За припущенням  $\mu_x(k)$  не залежить від  $k$ . Отже

$$M[\mu_x(k)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu_x dt = \mu_x.$$

Через припущення про слабку стаціонарність  $M[x_k(t)] = \mu_x$ . Тому  $\mu_x(k) = \mu_x$ . Аналогічно  $C_{xx}(\tau, k) = C_{xx}(\tau)$ , оскільки припущення незалежності  $C_{xx}(\tau, k)$  спричиняє за собою рівність  $M[C_{xx}(\tau, k)] = C_{xx}(\tau, k)$ , тоді як з припущення стаціонарності виходить, що  $M[C_{xx}(\tau, k)] = C_{xx}(\tau)$ .

2. Для ергодичності гаусового випадкового процесу вистачає, щоб він був слабо стаціонарним, а його коваріаційна функція  $C_{xx}(\tau)$  відповідала наступним чотирьом властивостям інтегрованості:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |C_{xx}(\tau)| d\tau < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |C_{xx}^2(\tau)| d\tau < \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\tau C_{xx}(\tau)| d\tau < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\tau| C_{xx}^2(\tau) d\tau < \infty, \end{aligned} \quad (2.82)$$

які можна замінити єдиною вимогою

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |C_{xx}(\tau)| d\tau \rightarrow 0, T \rightarrow \infty. \quad (2.83)$$

Оскільки оцінки середнього значення і коваріаційної функції, отримані усереднюванням за часом при виконанні умови (2.82), то вони не залежать від вибору конкретної реалізації.

### 2.3.2. Змінні стану, що описуються гаусовими випадковими процесами

Надамо формальне визначення гаусовому випадковому процесу. Випадковий процес  $[x_k(t)]$  називається гаусовим, якщо для будь-якого набору фіксованих моментів часу  $[t_n]$  випадкові величини  $x_k(t_n)$  підпорядковані багатовимірному нормальному розподілу:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\exp[-1/2 |C| \sum_{i,j=1}^N |C_{i,j}| (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|C|}}, \quad (2.84)$$

де  $C$  - коваріаційна матриця, елементи якої  $C_{ij} = M[x_i - \mu_i](x_j - \mu_j)$ ;  $|\tilde{n}|$  - визначник матриці  $C$ ,  $C_{ij}$  - алгебраїчне доповнення елементу  $C_j$ .

Чудова особливість  $N$ -вимірної нормальної розподілу полягає в тому, що всі його властивості визначаються виключно середніми значеннями  $\mu_i$  і коваріаціями  $C_{ij}$ .

Гаусові випадкові процеси переважають в практичних задачах; часто наявність гаусових властивостей можна передбачити на підставі багатовимірної центральної граничної теореми. В результаті лінійного перетворення гаусового процесу знову виходить гаусів процес. Ця властивість грає важливу роль в багатьох практичних і теоретичних додатках теорії випадкових процесів.

Розглянемо реалізацію  $x(t)$  ергодичного гаусового процесу з нульовим середнім значенням. Відмітимо, що індекс  $k$  вже можна не вказувати, оскільки властивості будь-якої вибіркової функції характеризує решта всіх вибірових функцій. Через ергодичну властивість поведінки  $x(t)$  на великому часовому інтервалі має ті ж статистичні властивості, що і аналогічні середні за ансамблем у

фіксовані моменти часу. Як наслідок отримуємо, що щільність вірогідності, пов'язана з миттєвими значеннями  $x(t)$  на великому інтервалі часу, є гаусовою з нульовим середнім значенням:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)}. \quad (2.85)$$

Коли  $x(t)$  має нульове середнє, дисперсія дорівнює

$$\sigma_x^2 = M[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx. \quad (2.86)$$

і не залежить від  $t$ . Для великих  $T$

$$\sigma_x^2 = \int_0^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(f) df. \quad (2.87)$$

Отже, гаусова щільність  $p(x)$  повністю характеризується функціями  $S_{xx}(f)$  або  $G_{xx}(f)$ , тому за кожною з них можна визначити  $\sigma_x^2$ . Ця важлива властивість висуває визначення  $S_{xx}(f)$  або  $G_{xx}(f)$  в число першорядних завдань аналізу випадкових процесів. Відмітимо, що на вигляд спектральної щільності або відповідних коваріаційних функцій не накладаються ніяких обмежень.

Якщо середнє значення  $x(t)$  не дорівнює нулю, то початкова щільність є гаусова загального вигляду:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_x)^2/(2\sigma_x^2)},$$

де середнє значення  $\mu_x$  дорівнює

$$\mu_x = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (2.88)$$

і не залежить від  $t$ . Для великих  $T$

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(x) dx, \quad (2.89)$$



а дисперсія дорівнює

$$\sigma_x^2 = M[(x(t) - \mu_x)^2] = M[x^2(t)] - \mu_x^2. \quad (2.90)$$

Нехай  $x(t)$  - стаціонарний гаусів випадковий процес (індекс  $k$  опущений для простоти позначень). Розглянемо дві випадкові величини  $x_1 = x(t)$  і  $x_2 = x(t + \tau)$ . Допустимо, що  $x_1$  і  $x_2$  підлягають двовимірному (сумісному) гаусову розподілу з нульовими середніми значеннями і однаковими дисперсіями  $\sigma_x^2$ . Тоді, за визначенням,

$$\sigma_x^2 = M[x^2(t)] = M[x^2(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx, \quad (2.91)$$

$$R_{xx}(t) = M[(x(t)x(t + \tau))] = p_{xx}(\tau) \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.92)$$

Величина  $p_{xx}(\tau)$  - це коефіцієнт кореляції при  $C_{x_1 x_2}(T) = R_{xx}(\tau)$  і  $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_x$

$$p_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2}. \quad (2.93)$$

Якщо покласти  $p = p_{xx}(\tau)$  і  $\mu = 0$ , то сумісна гаусова щільність імовірності є

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-p^2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_x^2(1-p^2)}(x_1^2 - 2px_1x_2 + x_2^2)\right]. \quad (2.94)$$

## 2.4. Похідні випадкових процесів

Похідна будь-якої даної вибіркової функції  $x(t)$  довільного випадкового процесу  $[x(t)]$  визначається як

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t + \varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \right]. \quad (2.95)$$

Існування цієї межі можна розуміти по-різному. Кажуть, що похідна  $x(t)$  існує

1) у звичайному сенсі, якщо межа існує для всіх реалізацій  $x(t)$  процесу  $[x(t)]$ ;

2) у середньоквадратичному сенсі, якщо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M[|\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} - \frac{dx(t)}{dt}|^2] = 0. \quad (2.96)$$

Для стаціонарних випадкових процесів похідна від  $x(t)$  існує в середньоквадратичному сенсі тоді і тільки тоді, коли коваріаційна функція  $R_{xx}(\tau)$  має похідні першого і другого порядків, тобто існують  $R'_{xx}(\tau)$  і  $R''_{xx}(\tau)$ .

#### 2.4.1. Кореляційні функції

Розглянемо наступні похідні, передбачаючи, що вони існують і безперервні:

$$R'_{xx}(\tau) = \frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau}, R''_{xx}(\tau) = \frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}, \quad x(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2.97)$$

За визначенням, для стаціонарних випадкових процесів

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= M[x(t)x(t+\tau)] = M[x(t-\tau)x(t)], \\ R_{x\dot{x}}(\tau) &= M[x(t)\dot{x}(t+\tau)] = M[x(t-\tau)\dot{x}(t)], \\ R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) &= M[\dot{x}(t)\dot{x}(t+\tau)] = M[\dot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Тоді

$$R'_{xx}(\tau) = \frac{d}{d\tau} M[x(t)x(t+\tau)] = M[x(t)\dot{x}(t+\tau)] = R_{x\dot{x}}(\tau). \quad (2.99)$$

Тому

$$R'_{xx}(\tau) = \frac{d}{d\tau} M[\dot{x}(t-\tau)x(t)] = -R_{\dot{x}x}(\tau). \quad (6.100)$$

Отже

$$R'_{xx}(0) = R_{xx}(0) = -R'_{xx}(0) = 0, \quad (2.101)$$

оскільки  $R'_{xx}(0)$  має одночасно бути додатною і від'ємною. Відповідне значення в  $R_{xx}(0) = \max R_{xx}(\tau)$ . Звідси витікає, що для стаціонарних випадкових процесів

$$M[x(t)\dot{x}(t)] = 0. \quad (2.102)$$

Максимум кореляційної функції  $R_{xx}$  відповідає перетину осі абсцис функцією  $R'_{xx}(\tau)$ , тобто взаємною коваріаційною функцією процесів  $[x(t)]$  і  $[\dot{x}(t)]$ . Перетин осі абсцис функцією  $R'_{xx}(\tau)$  відбувається з від'ємним нахилом, тобто

$$R'_{xx}(0-) > 0, R'_{xx}(0+) < 0. \quad (2.103)$$

На практиці визначати положення точки перетину звичайно простіше, ніж визначати положення максимуму.

$R_{xx}(\tau)$  є непарною функцією, тобто  $R'_{xx}(-\tau) = -R'_{xx}(\tau)$ .

*Контрольні запитання:*

- 1) Сформулювати основні поняття стаціонарних випадкових процесів.
- 2) Надати класифікацію випадкових процесів.
- 3) Визначити поняття коваріаційної функції випадкових процесів.
- 4) Навести приклади коваріаційних функцій, що часто застосовуються у теоретичних дисциплінах.
- 5) Визначити коваріаційну функцію гармонічного процесу.
- 6) Визначити коваріаційну функцію телеграфічного сигналу.
- 7) Визначити коваріаційну функцію і суму двох стаціонарних процесів.
- 8) Визначити поняття некорельованих залежних випадкових величин.
- 9) Визначити поняття нормованої кореляційної функції.
- 10) Визначити поняття взаємної кореляційної функції при наявності запізнення.

- 11) Навести алгоритм визначення спектрів за допомогою кореляційної функції.
- 12) Навести алгоритм визначення спектрів через перетворення Фур'є.
- 13) Визначити поняття ергодичності.

*Література до розділу 2*

1. Галай В.М., Зеленський К.Х., Сільвестров А.М. Теорія оптимального керування технологічними процесами. Полтава, ПНТУ ім. Ю.Кондитюка, 2009, - 200 с.
2. Сейдж Е.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
3. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления/ Под ред. Н.Д.Егупова. – М. Изд-во МГТУ им. Н.Е. Баумана, 2000. – 748 с.
4. Пугачев В.С., Казаков И.Э., Евлапов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем. – М.: Машиностроение, 1974 – 560 с.
5. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Трофимов А. И. Статистические методы анализа, синтеза и идентификации САУ/ Под ред.Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1998. – 560 с.

## **Розділ 3. Ідентифікація (оцінювання) змінних стану об'єкта**

### **3.1. Задача оцінювання стану**

При розробці методів оптимального керування, передбачається, що є можливість контролювати всі змінні стану.

У реальних об'єктах, як правило, не вдається контролювати всі змінні стану. З цієї причини розмірність вектора виходів звичайно менше розмірності вектора стану. Значна невизначеність вноситься похибками вимірів, шумами і випадковими збуреннями, а також тим, що моделі, які використовуються, не цілком адекватні об'єктам керування. Якщо не враховувати всі перераховані джерела невизначеності і випадковості при проектуванні систем керування і застосовувати звичайні алгоритми, можна отримати неефективну систему, яка не забезпечуватиме необхідної якості керування.

Звичайні, нерекурентні методи оцінювання стану вирішують наступні задачі:

1. Згладжування, коли оцінку стану у момент часу  $t$  потрібно будувати за інформацією, отриманою до моменту  $t_1 > t$ , із запізненням на час  $t_1 - t$ .

2. Фільтрація, коли оцінку стану у момент  $t$  потрібно будувати за інформацією, отриманою до моменту  $t_1 = t$ . У цьому випадку темп оцінювання збігається із темпом надходження інформації.

Різні алгоритми фільтрації, які найбільш часто використовуються, як правило, мають рекурентну форму.

3. Прогноз, коли оцінку стану у момент  $t$  потрібно будувати за інформацією, отриманою до моменту  $t_1 < t$ . Такі оцінки використовуються там, де потрібна екстраполяція вибіркової інформації або там, де для самих станів характерна наявність запізнення.

У загальному випадку оцінювання є задача встановлення станів системи за інформацією про її входи (керування і збурення) і виходи  $x$ , причому ця задача розв'язується у тому випадку, коли між даними вхід-вихід і станами можна встановити однозначну відповідність. Однозначність забезпечується виконанням умови спостережуваності системи.

Система послідовної оцінки (фільтрації або прогнозу) включає наступні складові.

### 1. Модель об'єкта

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) + \xi(t). \quad (3.1)$$

### 2. Початкові умови

$$x(0) = x_0 + \xi_0. \quad (3.2)$$

### 3. Алгоритм оцінювання

$$\frac{dx}{dt} = f(\hat{x}, u) + K(t)[y(t) - h(\hat{x})]; \hat{x}(0) = x_0. \quad (3.3)$$

#### 1. Вимірюваний вихід

$$y = h(x) + \eta. \\ Y = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}, \quad (3.4)$$

Передбачається, що модель об'єкта керування включає випадкову складову  $\xi(t)$ , обумовлену неконтрольованими збуреннями або неточністю моделі. Виходи, які являються функціями станів  $h(x)$ , вимірюються із перешкодою  $\eta(t)$ . Крім того, відомо зашумлений початковий стан  $x(0)$ .

Таким чином,  $x$  і  $y$  є випадкові процеси, причому передбачається, що статистичні властивості породжуючих їх випадкових процесів  $\xi(t)$  та  $\eta(t)$  і випадкової величини  $\xi_0$  відомі.

За статистичними властивостями  $\xi(t)$  і  $\xi_0$  можна визначити розподіл ймовірностей  $p(x, t)$  стану  $x(t)$  системи з відомою моделлю динаміки у будь-який момент часу. Оскільки при цьому ніяких спостережень за виходом процесу не передбачається, оцінка стану є прогнозом, і її невизначеність згодом зростає, що проявляється у розширенні відповідної щільності розподілу. Якщо ж проводяться виміри виходу системи, результати яких на проміжку  $\tau \in [0, t]$  позначимо через  $Y = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ ,  $V = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ , то оцінку стану  $x(t)$  можна будувати за умовним розподілом  $p(x(t)|Y)$  за умови, що відомі результати спостережень  $Y$ .

Оцінка стану, що побудована за умовним розподілом, на відміну від безумовного використовує результати поточних

вимірів, тому невизначеність такої оцінки, взагалі кажучи, зменшується, що проявляється у звуженні щільності розподілу. Вигляд оцінки визначається критерієм оцінки якості.

Так, якщо якість оцінювання характеризується мінімумом середнього значення квадрата відхилення оцінки  $\hat{x}(t)$  від невідомого істинного стану  $x(t)$ , найкращою оцінкою буде апостеріорне або умовне середнє, тобто середнє значення умовного розподілу  $p(x(t)|Y)$ :  $\hat{x}(t) = x(t) = M\{x(t)|Y\}$ .

Якщо ж критерієм якості оцінки є мінімум функції правдоподібності, то оцінкою буде величина піка умовного розподілу  $p(x(t)|Y)$ :  $\hat{x}(t) = x_m(t)$ .

У загальному випадку ці два критерії дають різні оцінки, хоча для деяких розподілів (наприклад, нормального) ці оцінки збігаються.

Наведені вище рівняння (3.1)–(3.4) задають систему оцінювання за методом найменших квадратів. Поточна оцінка стану  $\hat{x}(t)$  виходить як вирішення диференціального рівняння (3.1), яке описує еволюцію умовного середнього  $\bar{x}(t)$ . Права частина цього рівняння містить два доданка: перший описує вільний рух, а другий – збурений, причому в якості сили, що збурює, виступає відхилення фактично спостережуваного виходу  $y(t)$  від його прогнозу за моделлю спостережень:  $\hat{y}(t) = h(\hat{x}(t))$ . Величина корекції оцінки обумовлена цією збурюючою силою, регулюється матричним коефіцієнтом підсилення  $K(t)$ , який залежить від властивостей випадкових збурень і перешкод:  $K(t)$  зростає, якщо починають перебільшувати збурювання (тобто помилки моделі);  $K(t)$  зменшується, якщо починають перебільшувати перешкоди вимірів. Такий характер динаміки  $K(t)$  приводить до того, що оцінка в більшій мірі визначається тією інформацією, що в даний момент більш надійна.

### **3.2. Оцінювання станів лінійних систем**

Для оцінювання станів лінійних систем постановка задачі зазвичай має вигляд:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \xi(t), \quad (3.5)$$

$$y = C(t)x(t) + \eta(t), \quad (3.6)$$

$$x(0) = x + \xi. \quad (3.7)$$

У цих рівняннях  $x$  –  $n$ -вимірний вектор стану,  $y$  –  $l$ -вимірний вектор виходу,  $\xi$  –  $n$ -вимірний вектор випадкових збурень,  $\eta$  –  $l$ -вимірний вектор перешкод у каналі вимірювання,  $\xi_0$  – випадкова складова початкового стану  $x(0)$  (похибка визначення  $x(0)$ ). Величини  $x(t)$ ,  $y(t)$  є випадкові, які характеризуються деякими розподілами ймовірностей. Таким чином, рівняння (3.5) являється стохастичним диференціальним рівнянням.

### 3.2.1. Спостережуваність

Неформально система спостережувана, якщо всі координати вектора стану у деякий момент часу можна визначити за інформацією про вхід системи  $u(t)$  і її вихід  $y(t)$  на скінченному інтервалі часу. Більш строге визначення: система називається цілком спостережуваною, якщо довільний стан  $x(t_0)$  можна визначити за інформацією про керування  $u(t)$  і вихід  $y(t)$  на інтервалі  $[t_0, t_1]$ . Спостережуваність визначається детермінованими характеристиками системи і не враховуються властивості випадкових процесів.

Поняття повної спостережуваності, засноване на матриці спостережуваності, яку буде наведено в цьому розділі. Для спостережуваності системи потрібно мати можливість визначати  $x_0$  за даними про вихід  $y(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , оскільки, якщо стан  $x_0$  відомий, відома й вся вихідна від нього траєкторія  $x(t)$ , що визначається як вирішення рівняння (3.5):

$$x(t) = e^{At} x_0 = (c_0 E + c_1 t A + \dots + c_{n-1} t^{n-1} A^{n-1}) x_0. \quad (3.8)$$

Відповідно цьому для спостережуваного виходу  $y(t)$  отримуємо:

$$y(t) = Cx = (c_0 C + c_1 t CA + \dots + c_{n-1} t^{n-1} CA^{n-1}) x_0. \quad (3.9)$$



Визначаючи (3.8) відносно  $x_0$  і підставляючи отриманий вираз в (3.9), приходимо до наступного результату. Система (3.5), (3.7) буде цілком спостережуваною в момент  $t_f > t_0$ , якщо додатно визначена матриця

$$M(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt. \quad (3.10)$$

Тут через  $\Phi(t, t_0)$  позначена фундаментальна матриця системи. Цей результат отримано Р. Калманом:

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x_0, \quad (7.11)$$

$$x_0 = M(t_0, t_f)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt. \quad (7.12)$$

**Приклад 3.1.** Хімічний реактор із неперервним перемішуванням описується моделлю динаміки:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(1+d)x, \\ \frac{dx}{dt} = dx - (1+d)x. \end{cases} \quad (3.13), (3.14)$$

Дослідимо спостережуваність цієї системи у період запуску,  $t \in [0, t_f]$ . Припустимо, що температура зростає у часі і при цьому, відповідно, константи швидкостей реакцій також зростають у часі. Матриця динаміки  $A$  у цьому випадку буде мати вигляд:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -(1+d_1(t)) & 0 \\ d_1(t) & -(1+d_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Допустимо, що вимірювальна система може забезпечити відслідковування  $x_1(t)$  або  $x_2(t)$ , але не обох координат стану одночасно. Рівняння виходу, таким чином, має структуру

$$y(t) = C(t) x(t), \quad (3.16)$$

$$c_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_f / 2), \\ 0, & t \in (t_f / 2, t_f], \end{cases} \quad c(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t / 2), \\ 1, & t \in (t / 2, t]. \end{cases} \quad (3.17)$$

Такий вибір  $C(t)$  відповідає випадку, коли першу половину періоду ми вимірюємо  $x_1(t)$ , а другу –  $x_2(t)$ .

Побудуємо матрицю спостережуваності згідно (3.10):

$$M(0, t_f) = \int_0^{t_f/2} \Phi(t, 0)^T \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Phi(t, 0) dt + \int_{t_f/2}^{t_f} \Phi\left(t, \frac{t_f}{2}\right)^T \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Phi\left(t, \frac{t_f}{2}\right) dt \quad (3.18)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}.$$

Для визначення  $\varphi_{ij}(t)$  маємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{1j}(t, 0)}{dt} &= a_{1j}(t)\varphi_{1j}(t, 0), \quad \varphi_{11}(0, 0) = 1; \quad \varphi_{12}(0, 0) = 0. \\ \frac{d\varphi_{2j}(t, 0)}{dt} &= a_{2j}(t)\varphi_{j1}(t, 0) + a_{22}(t)\varphi_{j2}(t, 0), \\ \varphi_{21}(0, 0) &= 0; \quad \varphi_{22}(0, 0) = 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Із цих рівнянь витікає, що  $\varphi_{12}(t, 0) = 0$ . З урахуванням отриманих виразів (у результаті вирішення системи рівнянь (3.19)) матриця спостережуваності може бути записана так:

$$M(0, t) = \begin{vmatrix} \varphi(t, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} dt + \begin{vmatrix} \varphi(t, t/2) & \varphi\varphi \\ \varphi\phi & \varphi(t, t/2) \end{vmatrix} dt. \quad (3.20)$$

Із цього виразу видно, що на інтервалі  $[0, t_f/2]$  досліджуваний об'єкт не є цілком спостережуваним, оскільки підінтегральний вираз першого доданка правої частини не є додатно визначений. При перемиканні вимірювального пристрою у момент  $t = t_f/2$  на спостереження за координатою  $x_2(t)$  система може стати цілком

спостережуваною, як це витікає із другого члена, який може стати позитивно визначеним при відповідних значеннях коефіцієнтів  $a_{11}(t)$ ,  $a_{12}(t)$ ,  $a_{22}(t)$ .

### 3.3. Оптимальне оцінювання станів

Перейдемо тепер до аналізу проблеми оптимального оцінювання і зв'язаних з нею критеріїв оптимальності оцінки. Оптимальність оцінок може прийматися у різних розуміннях, наприклад, у розумінні мінімуму середньоквадратичного відхилення. В такому формулюванні, його можна буде поширити і на випадок нелінійних систем. Критерій зваженого середньоквадратичного відхилення для систем (3.5), (3.7) записується у вигляді

$$J = \frac{1}{2} [x(0) - x] P [x(0) - x] + \frac{1}{2} \{ (\dot{x} - Ax) R(t) (\dot{x} - Ax) + [y(t) - C(t)x(t)] * \\ * Q(t) [y(t) - C(t)x(t)] \} dt, \quad (3.21)$$

де другий доданок правої частини забезпечує мінімальність інтегральної квадратичної похибки моделі, третій – мінімальність інтегральної квадратичної помилки вимірів, а перший – мінімальність квадратичної помилки оцінки початкового стану. Вагові матриці  $P^{-1}_0$ ,  $R(t)$ ,  $Q(t)$  вибираються залежної від статистичних властивостей випадкових процесів  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$  і випадкової величини  $\xi_0$ . Припустимо,  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$  – гаусові випадкові не корельовані процеси (тобто білі шуми), не корельовані один з одним і з  $\xi_0$ :

$$M[\xi(t)] = 0, M[\eta(t)] = 0; M[\xi(t)\xi(\tau)^T] = R^{-1}(t)\delta(t - \tau), \\ M[\eta(t)x(0)^T] = 0; M[\xi(t)x(0)^T] = 0; M[\xi(t)\eta(0)^T] = 0; \\ M[x(0)] = x_0; \quad (3.22)$$

$$M[(x_0 - x(0))(x_0 - x(0))^T] = P_0, M[\eta(t)\eta(\tau)^T] = Q^{-1}(t)\delta(t - \tau).$$

Запровадимо допоміжну змінну  $u(t) = x - Ax$ . Тоді (3.21) прийме вигляд:

$$J = \frac{1}{2} [x(0) - x] P [x(0) - x] + \\ + \frac{1}{2} \{ u(t) R(t) u(t) + [y(t) - C(t)x(t)] Q(t) [y(t) - C(t)x(t)] \} dt. \quad (3.23)$$

Задача оцінювання може бути переформульована як задача синтезу детермінованого керування  $u(t)$ , що мінімізує критерій (3.23) на траєкторіях системи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t) \quad (3.24)$$

із вільною початковою умовою ( $x(0)$  не визначене). Гамільтоніан дорівнює

$$H = \frac{1}{2} [u^T R u + (y - Cx)^T Q (y - Cx)] + \lambda^T (Ax + u). \quad (3.25)$$

Умова  $\partial H / \partial u = 0$  набуде вигляд:

$$u(t) = -R^{-1}(t)\lambda(t), \quad (3.26)$$

де

$$\frac{d\lambda^T}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = [C^T Q (y - Cx) - A^T \lambda]^T \quad (3.27)$$

або

$$\frac{d\lambda}{dt} = -C^T Q C x - A^T \lambda + C^T Q y. \quad (3.28)$$

Оскільки початковий і кінцевий стани  $x(0)$  і  $x(t_f)$  вільні, граничні умови для  $\lambda(t)$  мають вигляд:

$$\lambda(t_f) = 0, \quad (3.29)$$

$$x(0) = x_0 - P_0 \lambda(0). \quad (3.30)$$

Підставивши (3.26) в (3.24), одержимо

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax - R^{-1}\lambda. \quad (3.31)$$

Рівняння (3.27)–(3.31) задають двоточкову крайову задачу, вирішуючи яку відносно  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$ , одержимо шуканий оптимальний алгоритм оцінювання. Позначимо через  $\hat{x}(t/t_f)$ ,  $\hat{u}(t/t_f)$  оптимальну оцінку стану і оптимальне керування у момент  $t_f$ , які побудовано за інформацією до моменту  $t_f$  включно.

Введемо перетворення

$$\hat{x}(t|t) = w(t) - P(t)\lambda(t), \quad (3.32)$$

де  $w(t)$  -  $n$ -вимірний вектор,  $P(t)$  -  $(n \times n)$  - матриця коваріацій, яка підлягає визначенню.

З урахуванням (3.32) одержимо для лівої і правої частин (3.31)

$$\dot{x} = A(w - P\lambda) - R^{-1}\lambda, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} Ax - R\lambda &= \dot{w} - \dot{P}\lambda = \dot{w} - \dot{P}\lambda + \\ &+ P[CQC(w - P\lambda) + A\lambda - CQy]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Після приведення подібних маємо

$$\frac{dw}{dt} - P^T Q(y - Cw) - Aw = \left[ \frac{dP}{dt} - PA^T - AP - R^{-1} + PC^T QCP \right] \lambda. \quad (3.35)$$

Візьмемо такі значення  $w(t)$ ,  $P(t)$ , за яких коефіцієнти при  $\lambda$  перетворювалися б у нуль і задовольняли межові умови (3.29), (3.30):

$$\frac{dw}{dt} = Aw + PC^T Q(y - Cw), w(0) = x_0, \quad (3.36)$$

$$\frac{dP}{dt} = -PA^T + AP + R^{-1} - PC^T QCP, P[0] = P_0. \quad (3.37)$$

Тепер зрозуміло, що шукані оцінки станів  $\hat{x}(t/t_f)$  отримуються, якщо спочатку вирішити в прямому часі рівняння (7.36), (7.37), а

потім, підставивши отримані значення в (7.32), розв'язати (7.29), (7.30), (7.32) у оберненому часі.

При цьому  $\hat{x}(t/t_f)$  є оцінка за методом найменших квадратів для моменту  $t_f$  за інформацією до моменту  $t_f$  включно, тобто це згладжена не рекурентна оцінка, що не може бути отримана й використана в темпі із процесом.

Більш корисною є оцінка  $\hat{x}(t_j/t_f)$ , що виходить у результаті вирішення задачі фільтрації за методом найменших квадратів для моменту  $t_f$  за інформацією, відомої до цього моменту. Згідно (3.29)  $\lambda(t_f) = 0$ , тому з (3.32) одержимо

$$x(t_j | t_f) = w(t). \quad (3.38)$$

Звідси, оцінка в задачі фільтрації може бути отримана за допомогою рівняння (3.36) для довільного моменту часу  $t$ :

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t|t) + P(t)C(t)Q(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \hat{x}(0|0) = x. \quad (3.39)$$

Матрицю коваріацій  $P(t)$  можна обчислити заздалегідь, оскільки вона не залежить ні від поточної інформації  $y(t)$ , ні від значень оцінки  $\hat{x}(t)$ .

Таким чином, для задачі (3.1) – (3.3), (3.23):

1. Згладжена оцінка  $\hat{x}(t/t_f)$  дається рівняннями (3.38), (3.39) для оцінки фільтрації  $\hat{x}(t/t_f) = w(t)$  і її коваріації  $P(t)$  і рівнянням (3.31) із урахуванням (3.32)

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t|t) + R P [\hat{x}(t|t) - \hat{x}(t|t)], \quad (3.40)$$

розв'язаних у зворотному часі.

Динаміка матриці коваріацій описується рівнянням

$$\begin{aligned} \frac{dP(t|t_f)}{dt} &= (A + R^{-1}P^{-1})P(t|t_f) + P(t|t_f)(A + R^{-1}P^{-1}) - R^{-1} - PC^T QCP, \\ P(t_f|t_f) &= P(t_f) \end{aligned} \quad (3.41)$$

2. Оцінка фільтрації  $\hat{x}(t/t)$  дається рівнянням (3.39), а її

коваріація  $P(t)$  – рівнянням (3.37).

3. Прогнозуюча оцінка  $\hat{x}(t/t_0)$  визначає стан у момент  $t > t_0$  за інформацією до моменту  $t_0$  включно. Ця оцінка виходить безпосередньо з рівнянь фільтрації, якщо покласти  $Q(t) \rightarrow 0$  при  $t > t_0$ . Позначимо

$$K(t) = P(t)C^T(t)Q(t). \quad (3.42)$$

Тоді рівняння, яке описує динаміку оцінки  $\hat{x}(t/t)$ , можна представити у вигляді

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C\hat{x}(t)]. \quad (3.43)$$

Таким чином, система оцінювання має те ж рівняння динаміки, що і вихідний процес, з додаванням коректуючого члена, який враховує надходження поточної інформації. Це подання аналогічно оптимальному у квадратичному розумінні лінійного закону регулювання. Рівняння для матриці коваріацій  $P(t)$  збігається із рівнянням Ріккаті для матричного коефіцієнта посилення регулятора. В цьому проявляється подвійність завдань оцінювання за методом найменших квадратів і синтезу лінійного оптимального регулятора.

### Приклад 3.2

Повернемося до процесів у хімічному реакторі з неперервним перемішуванням, динаміка яких описується системою рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = -(1 + d_1)x_1 + \xi_1(t), \quad x_1(0) = x_{10} + \xi_{10}, \quad (3.44)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = d_1x_1 - (1 + d_2)x_2 + \xi_2(t), \quad x_2(0) = x_{20} + \xi_{20}, \quad (3.45)$$

$$y(t) = x_2(t) + \eta(t). \quad (3.46)$$

Припустимо, що випадкові збурювання  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  (обумовлені, наприклад, коливаннями витрат, температур або якими-небудь іншими неконтрольованими впливами) є гаусові білі шуми і нульовим середнім і матрицею коваріацій  $R^{-1}(t)$ :

$$M[\xi(t)\xi^T(\tau)] = R^{-1}(t)\delta(t-\tau).$$

Далі, нехай  $\eta(t)$  і  $\xi_2(t)$  є гаусові із нульовими середніми і коваріаціями

$$M[\eta(t)\eta(\tau)] = Q^{-1}(t)\delta(t-\tau). \quad M[\xi_0\xi_0^T] = P_0.$$

Згідно (3.9) отримуємо рівняння оцінки стану у вигляді

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -(1+d)\hat{x} + P(t)Q(t)[y - \hat{x}(t)], \quad (3.47)$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = d\hat{x} - (1+d)\hat{x} + P(t)Q(t)[y - \hat{x}(t)]. \quad (3.48)$$

Елементи матриць  $P(t)$  обчислюються заздалегідь за формулами із урахуванням умови симетрії  $P_{12}(t) = P_{21}(t)$ :

$$\frac{dP(t)}{dt} = -2(1+d)P(t) + r - QP(t), \quad (3.49)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = dP(t) - (2+d+d)P(t) + r - QP(t)P(t), \quad (3.50)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = dP(t) - 2(1+d)P(t) + r - QP(t). \quad (3.51)$$

Ці рівняння вирішуються заздалегідь, а система для оцінок повинна вирішуватися або у темпі із процесом, або в отриманий заздалегідь розв'язок необхідно підставляти поточні значення  $y(t)$  (якщо це можливо).

### 3.3.1. Оцінювання за дискретними даними

Для випадку дискретних вимірів рівняння виходу запишеться у вигляді

$$y(t_k) = C(t_k)x(t_k) + \eta(t_k), \quad k=1,2,\dots \quad (3.52)$$

$\eta(t_k)$  - гаусів білий шум з нульовим середнім і матрицею коваріацій  $Q_k^{-1}$



Рівняння фільтрації в цьому випадку виходять із відповідних рівнянь для випадку безперервного часу, якщо покласти  $Q_k = Q(t_k) \Delta t_k$  і

$$Q(t) = \sum_{k=1}^M Q_k \delta(t - t_k); \quad t_f = \sum_{k=1}^M t_k. \quad (3.53)$$

Підставляючи (3.53) в (3.37) і (3.39), одержимо дві системи рівняння фільтрації в дискретному часі.

Між моментами вимірів  $t_{k-1} < t < t_k$  використовуються рівняння прогнозу, які виходять із рівнянь (3.37) і (3.39), якщо  $Q = 0$

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t|t), \quad (3.54)$$

$$\frac{dP(t|t_{k-1})}{dt} = P(t|t_{k-1})A^T(t) + A(t)P(t|t_{k-1}) + R^{-1}(t). \quad (3.55)$$

У момент надходження наступного виміру використовуються рівняння відновлення оцінок

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t_-) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t|t_-)], \quad (3.56)$$

$$P(t_k|t_k) = P(t_k|t_{k-1}) - K(t_k)C(t_k)P(t_k|t_{k-1}), \quad (3.57)$$

$$K(t_k) = P(t_k|t_{k-1})C^T(t_k)[C(t_k)P(t_k|t_{k-1})C^T(t_k) + Q_k^{-1}]^{-1}. \quad (3.58)$$

Отже, для згладжування необхідно розв'язувати рівняння у пряму часі, а потім за допомогою рівняння (3.39) побудувати оцінку  $\hat{x}(t|t_f)$ .

Рівняння для коваріації входить за допомогою підстановки (3.55) і (3.56) у рівняння (3.40) і у наступному його інтегруванні.

### 3.4. Оцінювання стану нелінійних систем

Узагальнення задачі оцінювання станів на випадок нелінійних систем описується рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) + \xi(t), \quad (3.59)$$

$$x(0) = x_0 + \xi_0, \quad (3.60)$$

$$y(t) = h(x, t) + \eta(t). \quad (3.61)$$

Рівняння (3.61) моделює нелінійний вимірювальний пристрій. Передбачається, що випадкові процеси  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  і випадкова величина  $\xi_0$  мають нульові математичні сподівання і похідні розподілу ймовірностей.

Для нелінійних систем умовний розподіл ймовірностей стану не є гаусовий навіть при гаусових процесах  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  і випадковій величині  $\xi_0$ . Такий розподіл у загальному випадку задається нескінченною множиною своїх моментів, причому всі моменти взаємозв'язані, тому для отримання реально здійсненого (реалізованого) фільтра необхідно скористатися яким-небудь методом апроксимації.

### 3.4.1. Спостережуваність нелінійних систем

У задачі оцінювання станів спостережуваність є дуже важливою властивістю. Спостережуваність нелінійних систем установити значно складніше, ніж лінійних систем. Як правило, застосовують наступний підхід: спочатку лінеаризують нелінійну динаміку біля якої-небудь номінальної траєкторії  $\hat{x}(t)$ , а потім застосовують стандартні критерії спостережуваності для лінійних систем зі змінними параметрами.

Для одержання умов спостережуваності лінеаризуємо задачу (3.59), (3.61) в околі якої-небудь номінальної траєкторії нелінійної системи  $\hat{x}(t)$ , а потім перейдемо до лінеаризованих рівнянь динаміки у відхиленнях:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t), \quad \delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t), \quad (3.62)$$

$$A(t) = (df/dx)|_{\bar{x}(t)}, \quad C(t) = (dh/dx)|_{\bar{x}(t)}, \quad (3.63)$$

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = A(t)\delta x(t), \quad \delta x(0) = \delta x_0, \quad (3.64)$$

$$\delta y(t) = C(t) \delta x(t). \quad (3.65)$$

При такій лінеаризації ми не звертаємо на випадкові перешкоди  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  і  $\xi_0$ , оскільки спостережуваність – властивість системи і не залежить від перешкод.

Нелінійна система (3.59), (3.61) спостережувана для всіх початкових умов  $x_0$ , якщо матриця

$$M(0, t_f) = \int_0^{t_f} \Phi(t, 0)^T C^T(t) C(t) \Phi(t, 0) dt \quad (3.66)$$

буде додатково визначена при  $t_f > 0$ , де  $\Phi(t, \tau)$  фундаментальна матриця вирішення (3.59).

**Приклад 3.3.** Розглянемо циклічний адіабатичний хімічний реактор, у якому йде процес  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . Модель процесу задається рівняннями:

$$\frac{dc_A}{dt'} = -k_1 c_A, \quad c_A(0) = c_{A_0}, \quad (3.67)$$

$$\frac{dc_B}{dt'} = k_1 c_A - k_2 c_B, \quad c_B(0) = c_{B_0}, \quad (3.68)$$

$$\frac{dT}{dt'} = J_1 k_1 c_A + J_2 k_2 c_B, \quad T(0) = T_0, \quad (3.69)$$

де  $J_k = -\Delta H_k / \rho C_p$ .

Інтегруючи рівняння (3.9) теплового балансу, отримаємо

$$T(t) = T_0 + (J_1 + J_2)(c_{A_0} - c_A) + J_2(c_{B_0} - c_B) \quad (3.70)$$

Отже, якщо відомі концентрації  $c_A$ ,  $c_B$ , температуру можна визначити за (3.70). Нехай константи швидкостей реакції являються функціями  $T$ :

$$k_i = A_{i0} e^{-E_i / RT}, \quad i = 1, 2. \quad (3.71)$$

Будемо думати, що константи швидкостей реакції є функціями температури

$$k_i = A_{i0} \exp[-E_i/RT], i = 1, 2. \quad (3.72)$$

Уведемо нові координати

$$\begin{aligned} x_1 &= c_A, \quad x_2 = c_B, \quad t = t'/A_{10}; \quad p = E_2/E_1. \\ a_0 &= (R/E_1)[T_0 + (J_1 + J_2)c_{A0} + J_2c_{B0}]; \quad a_1 = (R/E_1)(J_1 + J_2); \quad a_2 = \\ &\quad J_2R/E_1 \\ \gamma &= A_{20}/A_{10}; \quad x_{10} = c_{A0}, \quad x_{20} = c_{B0} \end{aligned} \quad (3.73)$$

В цих координатах вираз (3.70) прийме вигляд:

$$RT/E_1 = a_0 - a_1x_1 - a_2x_2, \quad (3.74)$$

а вся система запишеться так:

$$\frac{dx_1}{dt} = -e^{-d(t)}x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad (3.75)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -e^{-d(t)}x_1 - \gamma e^{-pd(t)}x_2, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (3.76)$$

$$y = x_2(t). \quad (3.77)$$

$$d(t) = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1x_1 - \alpha_2x_2}.$$

Лінеаризувавши цю систему біля деякої номінальної траєкторії  $\hat{x}(t)$  із початковим станом  $(x_{10}, x_{20})$ , отримаємо рівняння у відхиленнях:

$$\delta y(t) = C\delta x(t), \quad (3.78)$$

$$\frac{\delta \dot{x}}{dt} = A(t)\delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0. \quad (3.79)$$

$$C = [0 \quad 1]; \quad C = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}; \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}\bar{d}(t) &= d(\bar{x}(t)); \quad a_{11}(t) = -e^{-\bar{d}(t)}(1 - \bar{d}(t)\alpha_1\bar{x}_1); \\ a_{12}(t) &= \alpha_2\bar{x}_1\bar{d}^2(t)e^{-\bar{d}(t)};\end{aligned}\tag{3.81}$$

$$a_{21}(t) = -e^{-\bar{d}(t)}(1 - \alpha_1\bar{x}_1\bar{d}^2(t))(\rho\alpha_1\bar{x}_2e^{-p\bar{d}(t)}),\tag{3.82}$$

$$a_{22}(t) = -\alpha_2\bar{x}_1\bar{d}^2e^{-\bar{d}(t)} - \rho e^{-\bar{d}(t)}[1 - p\alpha_2\bar{x}_2\bar{d}^2(t)]\tag{3.83}$$

Далі, оскільки

$$C^T C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

то

$$\begin{aligned}M(0, t_f) &= \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} dt = \int_0^{t_f} \\ &\begin{bmatrix} \varphi_{21}^2 & \varphi_{21}\varphi_{22} \\ \varphi_{21}\varphi_{22} & \varphi_{22}^2 \end{bmatrix} dt.\end{aligned}\tag{3.84}$$

Звідси витікає, що матриця  $M(0, t_f)$  може бути зроблена позитивно визначеною при належному виборі параметрів, і, відповідно, нелінійна система може бути спостережуваною.

Простішу форму спостережуваності можна отримати, якщо в якості номінальної взяти деяку траєкторію-константу. У цьому випадку матриця  $A$  буде сталою і спостережуваність буде визначатися рангом матриці

$$L = [C^T : A^T C^T] = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}.\tag{3.85}$$

Ранг цієї матриці дорівнює 2 - необхідна і достатня умова спостережуваності, що виконується при виборі  $a_{21}(t)$  у вигляді (3.82).

### 3.4.2 Оптимальне нелінійне згладжування

Розглянемо середньоквадратичний критерій

$$J = \frac{1}{2} [x(0) - x] P [x(0) - x] + \\ + \frac{1}{2} \{ [\dot{x} - f(x, t)] R(t) [\dot{x} - f(x, t)] \} dt + \\ + \frac{1}{2} \{ [y(t) - h(x, t)] Q(t) [y(t) - h(x, t)] \} dt, \quad (3.86)$$

при чому вагові матриці  $P_0^{-1}$ ,  $R(t)$  і  $Q(t)$  вибираються так, щоб відповідним чином враховувати похибки початкової оцінки, моделі і процесу вимірів.

Будемо вирішувати задачу оптимального згладжування, розповсюджуючи при цьому результат на фільтрацію і прогноз. Визначимо  $u(t)$  у вигляді

$$u(t) = \dot{x} - f(x, t). \quad (3.87)$$

Отже, задачу оптимального згладжування можна переформулювати як задачу синтезу оптимального детермінованого керування  $u(t)$  за критерієм

$$J = \frac{1}{2} [x(0) - x_0]^T P_0^{-1} [x(0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ u(t)^T R(t) u(t) \} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ [y(t) - h(x, t)]^T Q(t) [y(t) - h(x, t)] \} dt, \quad (2.88)$$

для системи

$$\dot{x} = f(x, t) + u(t), \quad (3.89)$$

$x(0)$  – вільне.

Для вирішення останньої задачі застосуємо принцип максимума. Гамільтоніан задається виразом

$$H = \frac{1}{2} [u^T R u + (y - h)^T Q (y - h)] + \lambda^T (f + u). \quad (3.90)$$

Необхідна умова мінімуму  $\partial H / \partial u = 0$  дає оптимальне керування

$$u(t) = -R^{-1}\lambda(t). \quad (3.91)$$

Допоміжні змінні  $\lambda(t)$  задовольняють рівняння

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} Q(y-h) - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda \quad (3.92)$$

з граничними умовами

$$\lambda(t_f) = 0; \quad (3.93)$$

$$x(0) = x_0 - P_0 \lambda(0). \quad (3.94)$$

Підставляючи (3.91) в (3.89), отримаємо

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}, t) - R(t)\hat{\lambda}(t). \quad (3.95)$$

Тепер, розв'язуючи (3.92) і (3.93), можна знайти розв'язання задачі оптимального згладжування. Відзначимо, що отримане розв'язання буде точним, оскільки при його виводі не робилося ніяких припущень, що спрощують.

### 3.4.3. Оптимальна нелінійна фільтрація

Для переходу до рівнянь фільтра знову введемо позначення  $\hat{u}(t)$ ,  $\hat{\lambda}(t)$  для оптимальних оцінок і спряжених змінних у момент  $t$ , побудованих за даними до моменту  $t_f$  включно. Будемо виводить рівняння для оцінок, спираючись на той факт, що існує декомпозиція задачі, що розглядається.

При згладжуванні динаміка оцінки визначається швидкістю зміни поточної оцінки в момент  $t$  при надходженні нової інформації в момент  $t_f$ , причому  $t < t_f$ , тобто величиною  $d\hat{x}(t/t_f)/dt_f$  у той час як при прогнозі динаміка визначається швидкістю зміни поточної оцінки у момент  $t$ , побудованої за інформацією, отриманої до деякого фіксованого моменту  $t_f < t$ , тобто величиною  $d\hat{x}(t/t_f)/dt$ .

При фільтрації швидкість зміни оцінки визначається величиною  $d\hat{x}(t_f/t_f)/dt_f$ , причому надходження нової інформації і відновлення оцінки відбувається синхронно, звідки очевидне представлення

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = \frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} \Big| + \frac{d\hat{x}(t|T)}{dT} \Big|. \quad (3.96)$$

Припустимо тепер, що існує нелінійне перетворення

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}[\lambda(t|t)]. \quad (3.97)$$

Для лінійної фільтрації це перетворення було лінійним і задавалося виразом (3.95), будучи розв'язаним крайової задачі (3.92) - (3.95). Застосовуючи до (3.97) правило диференціювання складної функції, отримаємо

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = \frac{d\hat{x}(t|t)}{d\hat{\lambda}(t|t)} \frac{d\hat{\lambda}(t|t)}{dt}. \quad (3.98)$$

Запровадимо матрицю "диференціальної чутливості"

$$P(t|t) = -\frac{d\hat{x}(t|t)}{d\hat{\lambda}(t|t)}. \quad (3.99)$$

Із урахуванням (3.99) рівняння (3.98) прийме вигляд

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt} = -P(t|t) \frac{d\hat{\lambda}(t|t)}{dt}. \quad (3.100)$$

Тепер скористаємося поданням (3.96)  $\hat{\lambda}(t/t_f)$ :

$$\frac{d\hat{\lambda}(t|t)}{dt} = \frac{d\hat{\lambda}(t|t)}{dt} \Big| + \frac{d\hat{\lambda}(t|T)}{dT} \Big| \equiv \hat{\lambda}(t|t) + \hat{\lambda}(t|t). \quad (3.101)$$

Межова умова (3.93) показує, що ліва частина цього рівняння повинна дорівнювати нулю. Із (3.92) випливає, що

$$\hat{\lambda}(t|t) = -\hat{\lambda}(t|t) = -h(\hat{x}, t)Q(t)[y(t) - h(\hat{x}, t)]. \quad (3.102)$$

Після підстановки цього виразу у (3.99) і покладаючи  $t = t_f$ , отримуємо:

$$\hat{x}(t|t) = -P(t|t)\lambda(t|t) = P(t|t)\hat{h}Q(y - \hat{h}). \quad (3.103)$$



Скористувавшись (3.95) при  $t = t_f$ , знайдемо:

$$x(t_f | t_f) = f(x(t_f | t_f), t_f). \quad (3.104)$$

Застосування представлення (3.96) до  $\hat{x}(t_f | t_f)$  дає наступне рівняння фільтра

$$\frac{\hat{x}(t | t)}{dt} = \hat{x}(t | t) + \hat{x}(t | t) \quad (3.105)$$

або

$$\frac{\hat{x}(t | t)}{dt} = \hat{x}(t | t) + P(t | t)h(\hat{x}, t)Q(t)[y(t) - h(\hat{x}, t)]. \quad (3.106)$$

Це рівняння має ту саму структуру, що й у випадку лінійних систем: прогноз стану за рівнянням динаміки плюс зворотний зв'язок, що коректує цей прогноз із врахуванням поточної вимірюваної інформації.

Початкові умови для фільтра можна одержати, якщо врахувати, що при  $t_f \rightarrow 0$  межева умова (3.93) дає  $\hat{\lambda}(0/0) = 0$ , звідки за допомогою (3.94) виходить оцінка

$$\hat{x}(0/0) = x_0. \quad (3.107)$$

Залишається отримати алгоритм обчислення матриці диференціальної чутливості  $P(t_f | t_f)$ , тобто отримати матричне рівняння Ріккати.

Диференціюючи (3.94) за  $t_f$  і вважаючи в одержуваній рівності (3.100)  $t, t_f \rightarrow 0$ , отримуємо

$$P(0/0) = P_0. \quad (3.108)$$

У силу того, що

$$\frac{d}{dt}[\hat{x}(t | t)] \equiv \frac{d}{dt}[\hat{x}(t | t)], \quad (3.109)$$

для лівої частини цієї рівності з врахуванням (7.100) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\hat{x}(t|t)] = & -(P(t|t) - P(t|t))\{\hat{f} - \\ & - [\hat{f}\lambda(t|t) + \hat{h}Qh - \hat{h}Q(x - \hat{h})]P(t|t)\}\hat{\lambda}(t|t). \end{aligned} \quad (3.110)$$

В свою чергу, права частина (3.109) записується у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\hat{x}(t|t)] & \equiv \frac{\partial}{\partial t}[f(\hat{x}, t) - R(t)\hat{\lambda}(t|t)] = \\ & = \hat{f}\hat{x}(t|t) - R(t)\hat{\lambda}(t|t) = -[\hat{f}P(t|t)R(t)]\hat{\lambda}(t|t). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Зіставляючи ліву і праву частини (3.109), одержуємо наступну умову: для того, щоб рівняння (3.109) виконувалося, необхідно, щоб перетворювалися у нуль всі коефіцієнти при  $\hat{\lambda}_{\text{ч}}(t/t_f)$ .

В силу

$$\frac{dP}{dt} = P_t(t|t_f) + P_{t_f}(t|t_f), \quad (3.112)$$

це лише одна складова матриці чутливості. Іншу складову отримаємо, застосувавши правило диференціювання складної функції до (3.99).

$$P(t|t) = \frac{\partial P(t|t)}{\partial \lambda(t|t)} \hat{\lambda}(t|t) = P'(t|t), \quad (3.113)$$

В результаті отримаємо шукане рівняння динаміки:

$$\frac{dP'(t_f|t_f)}{dt} = P'_t(t_f|t_f) + P'_{t_f}(t_f|t_f), \quad (3.114)$$

де

$$P'(t|t) = \frac{\partial P(t|t)}{\partial \lambda(t|t)} \hat{\lambda}(t|t). \quad (3.115)$$

Отже, остаточно одержуємо наступний результат. Другий доданок у правих частинах (3.112), (3.115) призводить до появи нескінченної послідовності взаємопов'язаних рівнянь для моментів апостеріорного розподілу ймовірностей. Рішення може бути отримано тільки шляхом апроксимації цієї нескінченної системи рівнянь. Всі можливі нелінійні фільтри відрізняються один від одного лише способом апроксимації.

Найбільш часто застосовується фільтр першого порядку, який отримується, якщо покласти  $P_{tf}(t_f / t_f) = 0$ .

У цьому випадку рівняння фільтрації буде таким:

$$\hat{x}(t|t) = \hat{f}(x, t) + P(t|t)\hat{h}Q(t)[y(t) - \hat{h}(x|t)],$$

$$\hat{x}(0,0) = x. \quad (3.116)$$

Наближене значення матриці чутливості  $P(t_f / t_f)$  задається рівнянням

$$\frac{dP(t|t)}{dt} = P(t|t)\hat{f} + \hat{f}P(t|t) -$$

$$-P(t|t)[\hat{h}Q(t)\hat{h} - \hat{h}Q(y - \hat{h})]P(t|t) + R(t),$$

$$P(0|0) = P_0. \quad (3.117)$$

Якщо до того ж покласти  $\hat{h}_{xx} = 0$ , то виходить алгоритм розширеної калманівської фільтрації.

Так само як і у лінійному випадку, рівняння прогнозу визначається тільки властивостями моделі і приймає форму

$$x(t|t) = f(x(t|t), t), x(0|0) = x, t|t. \quad (3.118)$$

**Приклад 3.4.** Розглянемо хімічний реактор з неперервним перемішуванням. Вимірюється тільки температура, тому для визначення концентрації  $c_A$  реагенту  $A$  доводиться застосовувати методи оцінювання стану. Модель процесу має вигляд

$$V \frac{dc_A}{dt'} = (c_{AF} - c_A)F - V k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) c_A', \quad (3.119)$$

$$V_p C_p \frac{dT}{dt'} = F_p C_p (T_F - T) - \Delta H V k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) c_A - hA(T - T_c). \quad (3.120)$$

Запровадимо нові координати:

$$x_1 = (c_{Af} - c_A) / c_{Af}, x_2 = (T - T_f) \gamma / T_f, \beta = hA / F \rho C_p, t = t' F / V;$$

$$D = k_0 e^{-\gamma} V / F, u = (T_c - T_f) \gamma / T_f, H = (-\Delta H) c_{Af} \gamma / \rho C_p T_f.$$

Тоді модель запишеться в такому вигляді:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + D(1 - x_1) \exp[x_2 / (1 + x_2 / \gamma)] + \xi_1(t) = f_1(x, t) + \xi_1(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(1 + \beta)x_2 + H \cdot D(1 - x_1) \exp[x_2 / (1 + x_2 / \gamma)] + \beta u + \xi_2(t) = f_2(x, t) + \beta u(t) + \xi_2(t).$$

де  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  - випадкові збурювання, що характеризуються матрицею коваріацій  $R^{-1}(t)$ ,  $\eta(t)$  - випадкова перешкода із нульовим середнім і дисперсією  $Q^{-1}$ . Рівняння виміру температури має вигляд

$$y(t) = x_2(t) + \eta(t) = Cx + \eta(t).$$

Лінеаризуємо систему в околі сталого стану  $(x_{1s}, x_{2s})$ . Матриця динаміки лінеаризованої системи

$$f_{x_s} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{x=x_s} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{x_{1s}}{(1 + x_{2s} / \gamma)^2} \\ \frac{1 - x_{1s}}{1 - x_{1s}} & -(1 + \beta) + \frac{Hx_{1s}}{(1 + x_{2s} / \gamma)^2} \end{bmatrix}.$$

Матриця спостережуваності визначається формулою (3.85):

$$L_0 = [C^T : A^T C^T] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-Hx_{1s}}{1 - x_{1s}} \\ 1 & -(1 + \beta) + \frac{Hx_{1s}}{(1 + x_{2s} / \gamma)^2} \end{bmatrix}.$$

Якщо  $Hx_{1s} \neq 0$ , ранг матриці  $L_0$  дорівнює 2, отже, нелінійна система спостережувана.

### 3.5. Оцінювання стану систем з розподіленими параметрами (СРП) гіперболічного типу

Розглянемо клас систем з розподіленими параметрами вигляду

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = A \frac{\partial x}{\partial z} + f[x(z,t), u(z,t)] + \xi(z,t), \quad (3.121)$$

$$x(0,t) = B_0 u_0(t), \quad (3.122)$$

$$y(t) = h[x(z_1^*, t), x(z_2^*, t), \dots, x(z_n^*, t)] + \eta(t). \quad (3.123)$$

де  $\xi, \eta$  -- випадкові процеси із нульовими середніми збуреннями і перешкодами, що задаються.

Цей клас систем включає лінійні і нелінійні системи і системи із запізненням.

#### 3.5.1. Спостережуваність для СРП

Загальні умови спостережуваності для систем (3.121) - (3.123) полягають у тому, що кожна характеристика рівняння (3.121) повинна перетинати поверхню вимірів (3.123), причому уздовж кожної характеристики повинні виконуватися умови спостережуваності для відповідної системи із зосередженими параметрами.

Розглянемо лінійну систему з постійними параметрами з нерухомими вимірювальними пристроями. Система описується рівняннями

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial x}{\partial z} + Ax + \xi(z,t), \quad (3.124)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^N C_i x(z_i^*, t) + \eta(t). \quad (3.125)$$

Її рішення визначається виразом:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right| = ax + \xi \quad (3.126)$$

вздовж сімейства характеристик

$$z = -a_1(t - t_0). \quad (3.127)$$

З рівнянь (3.124), (3.125) ясно, що траєкторії вимірів нерухомого датчика будуть перетинати будь-яку характеристику тільки тоді, коли датчик розташований у точці  $\dot{z} = I$ .

В іншому випадку область початкових станів, укладена між  $\dot{z}_i^*$   $\dot{z} = I$ , буде неспостережуваною.

Якщо тепер розглянути умови спостережуваності для систем із зосередженими параметрами уздовж характеристик, отримаємо наступне твердження:

Для того, щоб система (3.124), (3.125) була цілком спостережуваною, необхідно і достатньо, щоб кожна характеристика перетинала траєкторії вимірів і щоб ранг матриці

$$L_{od} = [\Phi(t_1, 0)^T C_1^T \dots \Phi(t_N, 0)^T C_N^T] \quad (3.128)$$

був рівний  $n$ , якщо  $\Phi(t, 0)$  має розмірність  $n \times n$ .

**Приклад 3.5.** Розглянемо задачу керування теплообмінником із нерухомими вимірювальними пристроями у точках  $z_1^* = 0.25$ ,  $z_2^* = 0.5$ ,  $z_3^* = 0.75$ ,  $z_4^* = 1$ . Динаміка процесу описується рівнянням

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + a(x - u), x(0, t) = 0. \quad (3.129)$$

Рішення цього рівняння на характеристиці

$$t = t_0 + z/g \quad (3.130)$$

здається виразом

$$\left. \frac{dx}{dt} \right| = ax - au. \quad \Phi(t, 0) = e^{a_0 t}. \quad (3.131)$$

Вектор вихідних координат обчислюється в такий спосіб:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(0,25t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(0,5t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(0,75t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(1,0t). \quad (3.132)$$

Матриця спостережуваності дорівнює

$$L = [e \ 0 \ 0 \ 0 : 0e \ 0 \ 0 : 0e \ 0 : 0 \ 0 \ 0e].$$

Ранг цієї матриці дорівнює 1 і збігається з порядком рівняння. Виходить, система є цілком спостережуваною. При цьому всі характеристики перетинає тільки  $z_4^*$ , тому система не буде спостережуваною, якщо не вимірювати температуру вихідного потоку.

Відмітимо, що нерухомий датчик, розміщений у точці  $z_4^* = 1$ , нічого не дає для поліпшення якості керування, оскільки отримувати з нього інформацію не можна безпосередньо використовувати для формування коригувальних впливів. Тому алгоритми оцінювання станів у випадку гіперболічних систем першого порядку служать тільки для визначення збурень на вході, а не для визначення повного початкового стану.

### 3.5.2. Оцінювання станів

Для оцінювання станів гіперболічних систем з розподіленими параметрами першого порядку вивід рівнянь фільтрації аналогічний виводу рівнянь фільтрації для систем із зосередженими параметрами, але більше громіздкий. Тому приведемо лише кінцеві результати.

Нехай заданий критерій якості оцінювання має вигляд:

$$I = \frac{1}{2} \{ (t-h) Q(t) (y-h) dt + \\ + \frac{1}{2} [x(r,t) - Ax(r,t) - f] R(r,s,t) [x(s,t) - Ax(s,t) - f] dt dr ds \}. \quad (3.133)$$

Послідовний алгоритм оцінювання стану системи (3.121) - (3.123), оптимальний у розумінні мінімуму функціонала (3.133), задається рівнянням

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(r,t)}{\partial t} = & A \frac{\partial \hat{x}(r,t)}{\partial r} + \hat{f}[\hat{x}(r,t), u(r,t)] \\ & + P(r,r,t) \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}(r,t)} Q(t) \{y - \hat{h}[\hat{x}(r,t), \dots, \hat{x}(r,t)]\}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

із початковими і межовими умовами

$$\hat{x}(r,0) = x(r), \hat{x}(0,t) = Bu(t). \quad (3.135)$$

Матриця  $P(r,s,t)$  -- матриця диференціальної чутливості розмірності  $n \times n$  є вирішенням рівняння:

$$\begin{aligned} P_t(r,s,t) = & f_x P + P f_x^T + A_1 P_r + P_s A_1^T + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(r, r_i^*, t) \frac{d \{ [dh/dx(r_i^*, t)] Q(t) (y - h) \}}{dx(r_j^*, t)} P(r_j^*, s, t) + R_1^+(r,s,t), \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$P(r, 0, t) = P(0, s, t) = 0, \quad (3.137)$$

$$P(r, s, 0) = P_0(r, s). \quad (3.138)$$

Як і раніше, для лінійних систем із білими гаусовими випадковими збуреннями і перешкодами  $P_0$  матриця коваріацій оцінки початкового стану,  $Q^{-1}(t)$  – коваріація вимірюваних перешкод, а  $R_1^+(r,s,t)$  – коваріація збурювання. У нелінійному і (або) негаусовому випадку ці матриці уже не мають настільки чіткого фізичного змісту і можуть розглядатися просто як настроєні параметри алгоритму фільтрації. Крім того, у нелінійному (негаусовому) випадку матриця  $P$  уже не є коваріаційна матриця оцінок і, якщо не застосована апроксимація, не може бути обчислена заздалегідь, а повинна розраховуватися одночасно із процесом.



*Контрольні запитання:*

- 1) Сформулювати задачу оцінювання стану.
- 2) Сформулювати задачу оцінювання станів лінійних систем.
- 3) Визначити поняття спостережуваності.
- 4) Сформулювати задачу оптимального оцінювання станів.
- 5) Навести алгоритм оптимального оцінювання станів.
- 6) Навести алгоритм оцінювання за дискретними даними .
- 7) Сформулювати задачу оцінювання стану нелінійних систем.
- 8) Визначити поняття спостережуваності для нелінійних систем.
- 9) Навести алгоритм оптимального нелінійного оцінювання.
- 10) Навести алгоритм оптимальної нелінійної фільтрації.
- 11) Визначити поняття спостережуваност для систем з розподіленими параметрами.

*Література до розділу 3*

1. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний.– М.: Наука, 1975. – 432 с.
2. Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евлапов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем. - М.: Машиностроение, 1974. – 560 с.
3. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Трофимов А.И. Статические методы анализа, синтеза и идентификации САУ/Под ред. Н.Д. Егупова – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Е.Баумана. 1998 – 560 с.
4. Современные методы идентификации систем/ Под ред. П. Ейкхоффа – М.: Мир, 1983 – 440 с.
5. Шахтарін Б.І. Оптимальна фільтрація і прогнозування випадкових процесів. – М.: Вид-во МГТУ ім. Н.Є. Баумана, 1991. – 210 с.
6. Kalman R.E., Busy R.S. New results in linear filtering and prediction theory//Trans. ASME. Y., Basic Eng. Vol. 83.#1. PP. 95-108 p.
7. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series//John Wiley, 1949. - 163p.

## Розділ 4. Моделі множинної регресії та їх ідентифікація методом найменших квадратів

Якщо на вихідну змінну  $Y$  об'єкта ідентифікації впливає декілька факторів  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , то маємо справу з множинною регресією, яку можна подати залежністю

$$M\{Y/X_1, X_2, \dots, X_m\} = X\beta, \quad (4.1)$$

де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$  - вектор параметрів  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , що оцінюються.

$M\{y/x\}$  – умовне математичне сподівання залежної змінної  $Y$  від  $m$  регресорів (незалежних змінних  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ).

Задача ідентифікації взаємозв'язку  $Y$  від  $X$  і є задачею визначення множинної регресії.

#### 4.1. Загальний запис множинної лінійної регресії

Розглянемо залежність ознаки  $Y$  від  $m$  незалежних змінних (регресорів)  $X_i$  ( $i =$ ). Лінійна теоретична модель її:

[illegible]

де  $\beta_i, i = \overline{1, m}$  - теоретичні коефіцієнти регресії (часткові коефіцієнти), які характеризують реакцію залежної змінної  $Y$  на зміну регресора  $X_i$ , тобто вони інформують про вплив на  $M(Y/X_1, X_2, \dots, X_n)$  змінної (регресора)  $X_i$  теоретичної моделі за умови, що решта регресорів цієї моделі залишаються сталими;

$\beta_0$  – вільний член, який визначає значення  $Y$  за умови, що всі регресори моделі (4.2) дорівнюють нулю.

Для однозначного визначення параметрів  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  необхідно, щоб

$$n \geq m+1, \quad (4.3)$$

де  $m + 1$  – число параметрів, якими визначається теоретична множинна лінійна регресія (4.2), значення яких оцінюються на основі обробки вибірки.

Якщо  $n > m+1$  стає неможливим підібрати лінійну форму (4.2), яка б в точності задовольняла всім спостереженням. Тому виникає потреба в визначенні таких оцінок  $\beta_i^*$ , за яких лінійна множинна функція регресії мала б найкраще наближення для одержаних спостережень.

Векторно-матрична форма теоретичної моделі (4.2)

$$Y = X \cdot \beta + \varepsilon, \quad (4.4)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1x_{11}x_{12}x_{1m} \\ 1x_{21}x_{22} \cdots x_{2m} \\ \vdots \\ 1x_{n1}x_{n2} \cdots x_{nm} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Похибка  $\varepsilon$  є випадковим вектором, компоненти  $\varepsilon_i$  якого характеризують відхилення, викликані випадковими збуреннями, які не враховано в структурі моделі.

При оцінюванні параметрів теоретичної лінійної множинної регресії для забезпечення статистичної надійності число  $n$  спостережень має суттєво перевищувати кількість оцінювальних параметрів  $m + 1$ .

## 4.2. Емпірична модель

Емпірична модель являє собою статистичний аналог теоретичної. За її допомогою визначаються статистичні оцінки параметрів моделі (4.2), шляхом статистичної обробки вибірки даних. Емпірична модель  $Y$  у векторно-матричній формі

$$Y = X \cdot \beta^* + e, \quad (4.5)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

вектор  $\beta^*$  - статистична оцінка теоретичного вектора  $\beta$  лінійної множинної регресії (4.4), вектор похибок  $e$  - статистична оцінка випадкового вектора  $\varepsilon$  цієї ж моделі.

Якщо компоненти вектора  $\varepsilon$  - це невідомі випадкові величини, то компоненти  $e_i$  вектора  $e$  можуть бути обчислені за даними вибірки.

Для визначення вектора  $\beta^*$  використовується метод найменших квадратів. Для цього мають бути виконані умови Гаусса-Маркова:

- 1)  $M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n};$
- 2)  $\text{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \sigma_{\varepsilon}^2, & i = j, \end{cases}$

тобто між випадковими відхиленнями  $\varepsilon_i$  і  $\varepsilon_j$  повинен бути відсутній кореляційний зв'язок, та  $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \text{const} = \sigma^2$ ;

3) між регресорами моделі і випадковим вектором  $\varepsilon$  має теж бути відсутній кореляційний зв'язок, тобто

$$\text{cov}(\varepsilon_i x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

4) регресори моделі повинні бути детермінованими, тобто точними;

5) модель має бути лінійною відносно своїх параметрів;

б) між змінними

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X_m = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix},$$

тобто між векторами  $X_1, X_2, \dots, X_m$  має бути відсутня лінійна залежність, тоді визначник матриці  $X^T X$  більше нуля;

7) випадковий вектор  $\varepsilon$  має мати багатовимірний нормальний закон розподілу ймовірностей

$$\varepsilon \sim N(0; \sigma \cdot I_n),$$

кожна компонента  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon$  також буде мати нормальний закон розподілу

$$\varepsilon_i \sim N(0; \sigma), \quad i = \overline{1, n};$$

8) ранг матриці  $X - r(X)$  повинен бути не менше  $(m+1)$ .

Виконання цих умов дає право на використання звичайного МНК для визначення статистично-оптимальних оцінок параметрів теоретичної лінійної множинної регресії, перевірки статистичних гіпотез та побудови інтервальних статистичних оцінок.

### 4.3 МНК- оцінювання вектора $\beta$

Із виразу (4.5) вектор похибок  $\vec{e}$  буде дорівнювати

$$e = y - X\beta^*. \quad (4.7)$$

Для визначення компонент вектора  $\beta^*$ , як статистичних оцінок компонент вектора  $\beta$ , використовується МНК. Суть методу найменших квадратів – мінімізація по  $\beta^*$  суми квадратів похибок  $e^T \cdot e$ :

$$\begin{aligned}
e^T \cdot e &= (y - X \cdot \beta^*)^T (\bar{y} - X \cdot \beta^*) = (\bar{y}^T - (\beta^*)^T \cdot X^T) (y - X \cdot \beta^*) = \\
&= y^T \cdot y - y^T \cdot X \cdot \beta^* - (\beta^*)^T \cdot X^T \cdot y + (\beta^*)^T \cdot X^T \cdot X \cdot \beta^* = \\
&= y^T \cdot y - 2(\beta^*)^T \cdot X^T \cdot y + (\beta^*)^T \cdot X^T \cdot X \cdot \beta^*,
\end{aligned}$$

де буквою  $(^T)$  позначено транспонування відповідного вектора чи матриці. Якщо використати такі властивості:

$$y^T \cdot X \cdot \beta^* = (\beta^*)^T \cdot X^T \cdot \bar{y}, (X \cdot \beta^*) = (\beta^*)^T \cdot X^T, \quad (4.8)$$

то

$$e^T \cdot e = y^T \cdot y - 2(\beta^*)^T \cdot X^T \cdot y + (\beta^*)^T \cdot X^T \cdot X \cdot \beta^*. \quad (4.9)$$

Необхідна умова мінімуму виразу (4.9):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(e^T \cdot e)}{\partial \beta^*} &= \frac{\partial}{\partial \beta^*} (y^T \cdot y - 2(\beta^*)^T \cdot X^T \cdot y + (\beta^*)^T \cdot X^T \cdot X \cdot \beta^*) = \\
&= -2 \cdot X^T \cdot y + X^T \cdot X \cdot \beta^* + ((\beta^*)^T \cdot X^T \cdot X)^T = -2 \cdot X^T \cdot y + \\
&\quad + X^T \cdot X \cdot \beta^* + X^T \cdot X \cdot \beta^* = -2 \cdot X^T \cdot y + \\
&\quad + 2 \cdot X^T \cdot X \cdot \beta^* = 0,
\end{aligned}$$

звідки  $X^T \cdot X \beta^* = X^T \cdot y$  або

$$\beta = (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot y,$$

або

$$\begin{aligned}
\beta^* &= (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot (X \cdot \beta + \varepsilon) = (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot X \cdot \beta + \\
&\quad + (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon.
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Остаточно одержимо

$$\beta^* = \beta + (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon. \quad (4.11)$$

#### 4.4. Числові характеристики МНК-оцінок та емпіричної функції регресії

Оскільки  $\beta^*$  є випадковим вектором, то його компоненти  $\beta_i^*$  будуть випадковими величинами. Отже, виникає потреба у визначенні їхніх числових характеристик.

Враховуючи (4.11) одержуємо математичне очікування оцінки  $\beta^*$ :

$$\begin{aligned} M(\beta^*) &= M(\beta + (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon) = M(\beta) + M((X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon) = \\ &= \beta + (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot M(\varepsilon) = \beta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

оскільки  $M(\varepsilon) = 0$ , то

$$M(\beta^*) = \beta,$$

тобто емпіричний вектор  $\beta^*$  є точковою незміщеною статистичною оцінкою для теоретичного вектора  $\beta$  параметрів множинної лінійної регресії (4.4).

Із (4.12) випливає, що

Тобто

$$M(\beta_i^*) = \beta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Для визначення дисперсій компонентів емпіричного вектора  $\beta^*$ , як випадкових величин, визначимо коварційний момент:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\beta^* \cdot (\beta^*)^T) &= M(\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)^T = \\ &= M(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon - \beta)(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon - \beta)^T = \\ &= M[(X^T X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon \cdot ((X^T X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon)^T] = \\ &= M[(X^T X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^T \cdot X ((X^T X)^{-1})^T] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X^T X)^{-1} X^T \cdot M \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \right\} \cdot X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \cdot M \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_1 \varepsilon_n \\ \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \dots \varepsilon_2 \varepsilon_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \varepsilon_1 \varepsilon_n \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n^2 \end{pmatrix} \cdot X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \cdot \begin{pmatrix} M(\varepsilon_1^2) M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) \dots M(\varepsilon_1 \varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2 \varepsilon_1) M(\varepsilon_2^2) \dots M(\varepsilon_2 \varepsilon_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ M(\varepsilon_n \varepsilon_1) M(\varepsilon_n \varepsilon_2) \dots M(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} \cdot X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 0 \dots 0 \\ 0 \sigma_\varepsilon^2 \dots 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 0 \dots \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \cdot X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X' \sigma_\varepsilon^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 0 \dots 0 \\ 0 1 \dots 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 0 \dots 1 \end{pmatrix} \cdot X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1} X' \sigma_\varepsilon^2 \cdot I_n \cdot \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\cdot X (X^T X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1},$$

оскільки  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$  і  $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$  ( $i \neq j$ ).



Таким чином

$$\text{cov}\left(\beta^* \cdot (\beta^*)'\right) = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1}. \quad (4.13)$$

Визначивши елементи оберненої матриці  $(X^T X)^{-1}$ , яку умовно позначимо  $C$ , а її елементи як  $c_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ), будемо мати

$$\text{cov}\left(\beta^* \cdot (\beta^*)^T\right) = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 \cdot C$$

або

$$\sigma_\varepsilon^2 \cdot C = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}.$$

Далі враховуючи що

$$\text{cov} \left( \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix} \left( \beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^* \right) \right) = \text{cov} \begin{pmatrix} (\beta_0^*)^2 & \beta_0^* \beta_1^* \beta_0^* \beta_2^* \cdots \beta_0^* \beta_m^* \\ \beta_1^* \beta_0^* (\beta_1^*)^2 & \beta_1^* \beta_2^* \beta_1^* \beta_m^* \\ \beta_2^* \beta_0^* \beta_2^* \beta_1^* (\beta_2^*)^2 & \beta_2^* \beta_m^* \\ \vdots & \\ \beta_m^* \beta_0^* \beta_m^* \beta_1^* \beta_m^* \beta_2^* \cdots (\beta_m^*)^2 \end{pmatrix},$$

одержуємо вираз для коваріаційної матриці оцінок  $\beta^*$

$$\text{cov}(\beta^* \cdot (\beta^*)) = \begin{pmatrix} \text{cov}(\beta_0^*)^2 & \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_1^*)^2 & \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_2^*)^2 & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_m^*)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 \cdot \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 \cdot \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_m^* \beta_m^*) \cdot \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Оскільки  $\text{cov}(\beta_i^*)^2 = D(\beta_i^*) = \sigma_{\beta_i}^2$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , то вираз (4.14) подамо у такому остаточному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 \cdot \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 \cdot \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_m^* \beta_m^*) \cdot \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2,m+1} \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & \cdots & c_{m+1,m+1} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$\text{де } \sigma_{\beta_0}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{11}, \quad \sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{22}, \quad \sigma_{\beta_2}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{33}, \dots, \sigma_{\beta_m}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{m+1,m+1}. \quad (4.16)$$

Отже дисперсії оцінок  $\beta_i^*$  будуть дорівнювати добуткам діагональних елементів  $c_{ij}$  матриці  $C$ , помножених на  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , де  $C = (X^T X)^{-1}$ .

Враховуючи, що коефіцієнти емпіричної множинної лінійної регресії є випадковими величинами, сама ця функція буде випадковою. Визначимо основні числові характеристики для неї.

Розглянемо рівняння множинної лінійної регресії з параметрами  $\beta_i^*$  ( $i=0,1,2,\dots,m$ ), визначеними за даними вибірки

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m, \quad (8.17)$$

де  $y_i^*$  — одне із можливих значень для заданого вектора  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Оскільки емпіричні коефіцієнти функції (4.17) випадкові величини, то і емпірична функція  $y_i^*$  буде випадковою. Отже, постає питання про визначення її основних характеристик:

1. Математичне очікування:

$$\begin{aligned} M(y_i^*) &= M(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) = \\ &= M(\beta_0^*) + x_1 M(\beta_1^*) + x_2 M(\beta_2^*) + \dots + \\ &+ x_m M(\beta_m^*) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тобто  $y^* = x\beta^*$  є незмінною оцінкою теоретичної функції  $y = x\beta$ .

Із (4.18) випливає, що для емпіричної функції регресії  $y^* = X \cdot \vec{\beta}^*$  буде виконуватися рівність

$$M(y^*) = M(X \cdot \beta_0^*) = XM(\beta^*) = X \cdot \beta, \quad (4.19)$$

2. Дисперсія:

$$\begin{aligned} D(y^*) &= D(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) = \\ &= D(\beta_0^*) + x_1^2 D(\beta_1^*) + x_2^2 D(\beta_2^*) + \dots + x_m^2 D(\beta_m^*) + \\ &+ 2x_1 \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) + 2x_2 \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) + \dots + 2x_m \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) + \\ &+ 2x_1 x_2 \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) + \dots + 2x_1 x_m \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) + \dots + \\ &+ 2x_{m-1} x_m \text{cov}(\beta_{m-1}^* \beta_m^*) = x^T \text{cov}((\beta^*)^T \beta^*) x, \end{aligned} \quad (4.20)$$

Векторно-матричний вигляд:

$$D(y_i^*) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot x^T (X^T X)^{-1} X.$$

3. Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_{y_i^*} = \sigma_\varepsilon \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} X}. \quad (4.21)$$

**4.5. Теорема Гаусса-Маркова для множинної лінійної регресії**

Нехай задано рівняння регресії

$$y = X \cdot \beta + \varepsilon$$

і виконуються передумови використання МНК:

1)  $X$  є детермінована матриця порядку  $n \times (m + 1)$  ранга  $(m + 1)$ ;

2)  $\varepsilon$  - випадковий вектор порядку  $n \times 1$ ,  $M(\varepsilon) = 0$ ,  $\text{cov}(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma_\varepsilon^2 I_n$ , тоді  $\beta^* = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$  буде найбільш ефективною (в розумінні найменшої дисперсії) статистичною оцінкою в класі лінійних незміщених оцінок за умови відсутності апіорної інформації про вектор  $\beta$ .

Нехай вектор

$$b^* = (A + B)y, \quad (4.22)$$

де  $A = (X^T X)^{-1} \cdot X^T$ ,  $B = n \times (m + 1)$  - невід'ємно-визначена матриця. Тоді

$$\begin{aligned} M(b^*) &= M(A + B) \cdot y = (A + B)M(y) = (A + B)M(X \cdot \beta + \varepsilon) = \\ &= (A + B)X \cdot \beta + (A + B)M(\varepsilon) = (AX + BX) \cdot \beta = \\ &= ((X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot X + BX) \cdot \beta = (I + BX) \cdot \beta = \beta + (BX) \cdot \beta, \end{aligned}$$

оскільки  $M(\varepsilon) = 0$ .

Вектор  $b^*$  буде незміщеною статистичною оцінкою для вектора  $\beta$ , якщо

$$BX = 0. \quad (4.23)$$

Визначимо коваріацію вектора  $b^*$  :

$$\begin{aligned}
\text{cov}(b^* \cdot (b^*)^T) &= M(b^* - \beta)(b^* - \beta)^T = \\
&= M((A+B)y - \beta)((A+B)y - \beta)^T = \\
&= M((A+B)(X \cdot \beta + \varepsilon) - \beta)((A+B)(X \cdot \beta + \varepsilon) - \beta)^T = \\
&= M[(AX + BX)\beta + (A+B)\varepsilon - \beta][(AX + BX)\beta + (A+B)\varepsilon - \beta].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$AX = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot X = I; BX = 0, \text{ то}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(b^* \cdot (b^*)^T) &= M(b + (A+B) \cdot \varepsilon - \beta)(\beta + (A+B) \cdot \varepsilon - \beta)^T = \\
&= M((A+B) \cdot \varepsilon)((A+B) \cdot \varepsilon)^T = M((A+B) \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^T \cdot (A^T + B^T)) = \\
&= (A+B)M(\varepsilon \cdot \varepsilon^T)(A^T + B^T) = (A+B)\text{cov}(\varepsilon \cdot \varepsilon^T)(A^T + B^T),
\end{aligned}$$

оскільки  $\left( M \left( \varepsilon \varepsilon^T \right) = \text{cov} \left( \varepsilon \cdot \varepsilon^T \right) \right)$ , а

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \text{const},$$

то

$$\begin{aligned}
\text{cov}(b^* \cdot (b^*)^T) &= \sigma_{\varepsilon}^2(AA^T + AB^T + BA^T + BB^T) = \sigma_{\varepsilon}^2((X^T X)^{-1} \cdot \\
\cdot X^T((X^T X)^{-1} \cdot X^T)^T &+ (X^T X)^{-1} X^T B^T + B((X^T X)^{-1} \cdot X^T + BB^T)) = (4.24) \\
&= \sigma_{\varepsilon}^2((X^T X)^{-1} + BB^T) = \sigma_{\varepsilon}^2((X^T X)^{-1} + \sigma_{\varepsilon}^2 BB^T),
\end{aligned}$$

Так як  $BX = 0$ .

Таким чином

$$\text{cov}(b^* \cdot (b^*)^T) = \sigma_{\varepsilon}^2(X^T X)^{-1} + \sigma_{\varepsilon}^2 BB^T, \quad (4.25)$$

або

$$\text{cov}\left(b^* \cdot (b^*)^T\right) = \sigma_{\varepsilon}^2 \left( (X^T X)^{-1} + BB^T \right).$$

Запишемо добуток матриць  $B \cdot B^T$ :

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21}b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1}b_{n2} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Подамо рівність (4.25) в такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \cdots & \sigma_{\beta_2}^2 \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \cdots & \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix} = \quad (4.26)$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m+1,m+1} \end{pmatrix} + \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m+1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m+1,m+1} \end{pmatrix}$$

Аналогічно (4.16), враховуючи (4.26), маємо

$$\sigma_{\beta_0}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (c_{11} + b_{11}),$$

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (c_{22} + b_{22}), \dots, \sigma_{\beta_m}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (c_{m+1,m+1} + b_{m+1,m+1}). \quad (4.27)$$

Порівнюючи дисперсії (4.16) і (4.27) для вектора  $\beta^*$  і вектора  $b^*$  бачимо, що дисперсії (4.16) будуть менше на величину діагональних елементів матриці  $B \cdot B^T$ , порівняно з дисперсіями (4.27) для вектора  $b^*$ , що й доводить твердження теореми.

#### 4.6. Визначення точкової незміщеної статистичної оцінки для $\sigma_{\varepsilon}^2$ випадкових відхилень $\varepsilon_i$

Оскільки  $e_i$  є статистичною оцінкою для  $\varepsilon_i$ , то  $\sigma_{\varepsilon}^2$  буде пов'язане із  $e_i$ . Прогнозне значення ознаки  $Y$  буде дорівнювати

$$y^* = X\beta^* = X(X^T X)^{-1} X^T y. \quad \text{Позначивши } X(X^T X)^{-1} X^T = N,$$

одержимо  $y^* = N \cdot y$ .

Вектор залишків

$$\begin{aligned} e &= y - y^* = y - X\beta^* = y - X(X^T X)^{-1} X^T y = \\ &= (I - X(X^T X)^{-1} X^T) \cdot y = (I - N) \cdot y = T \cdot y \end{aligned} \quad (4.28)$$

Отже

$$e = T \cdot y, \quad (4.29)$$

де

$$I - N = T. \quad (4.30)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} N' &= N; N^2 = N; \\ T' &= T; T^2 = T, \end{aligned} \quad (4.31)$$

то матриці  $N$ ,  $T$  називають ідемпотентними. Окрім того слід  $tr$  матриці  $T$  дорівнює:

$$tr T = tr(I - N) = tr I - tr N. \quad (4.32)$$

Враховуючи особливу структуру матриць  $N$  і  $T$ , маємо

$$NX = X \cdot (X^T X)^{-1} X^T X = X \cdot (X^T X)^{-1} (X^T X) = X;$$

$$NX = X;$$

$$TX = (I - N)X = I \cdot X - N \cdot X = X - X = 0;$$

$$TX = 0. \quad (4.33)$$

Повернемося до вектора відхилень (4.29):

$$e = T \cdot y = T(X\beta + \varepsilon) = (T \cdot X)\beta + T\varepsilon = T\varepsilon,$$

$$e = T\varepsilon. \quad (4.34).$$

Сума квадратів відхилення:

$$e^T \cdot e = (T\varepsilon)^T (T\varepsilon) = \varepsilon T \varepsilon \quad (4.35)$$

Візьмемо математичне сподівання від правої та лівої частини рівності (4.35), використовуючи (4.34):

$$\begin{aligned} M(e^T \cdot e) &= M(\varepsilon^T T \varepsilon^T) = \sigma_\varepsilon^2 \text{tr}(T) = \sigma_\varepsilon^2 \text{tr}(I_n - X(X^T X)^{-1} X^T) = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 [\text{tr}(I_n) - \text{tr}(X(X^T X)^{-1} X^T)] = \sigma_\varepsilon^2 [\text{tr}(I_n) - \text{tr}(X^T X (X^T X)^{-1})] = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 [\text{tr} I_n - \text{tr} I_{m+1}] = \sigma_\varepsilon^2 (n - m - 1) \end{aligned}$$

оскільки матриця  $X^T X$  має порядок  $(m + 1)$  і

$$\text{tr}(X(X^T X)^{-1} X^T) = \text{tr}((X^T)^{-1} X^T) = \text{tr} I_{m+1} = m + 1,$$

де  $I_{m+1}$  – одинична матриця  $m + 1$ -го порядку.

Таким чином

$$M(e^T \cdot e) = \sigma_\varepsilon^2 (n - m - 1).$$

Тоді незміщена оцінка  $S_\varepsilon^2$  дисперсії та середньоквадратичне відхилення  $S_\varepsilon$  буде обчислюватись за формулою

$$S_\varepsilon^2 = \frac{e^T \cdot e}{n - m - 1} = \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1}. \quad (4.37)$$

Враховуючи (4.36), вирази (4.17), (4.23), (4.19), (4.24) набувають вигляду:

$$\text{cov}(\beta^* \cdot (\beta^*)^T) = S_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1},$$

$$\sigma_{\beta_0^*}^2 = S_{\beta_0^*}^2 = S_\varepsilon^2 c_{11}, \sigma_{\beta_1^*}^2 = S_{\beta_1^*}^2 = S_\varepsilon^2 c_{22}, \dots, \sigma_{\beta_m^*}^2 = S_{\beta_m^*}^2 = S_\varepsilon^2 c_{m+1, m+1},$$

$$S_{y_i^*}^2 = S_\varepsilon^2 X^T (X^T X)^{-1} X, \quad (4.38)$$

$$S_{y_i^*} = S_\varepsilon \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x}, \quad (4.39)$$



де  $S_{y_1}^2$ ,  $S_{y_i}^2$  є відповідно незміщеною оцінкою дисперсії і середньоквадратичною відхилення емпіричної функції регресії.

#### 4.7. Статистична незалежність оцінок $\beta^*$ і $S_\varepsilon^2$

Як відомо, з (4.11),

$$\beta^* = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \vec{\varepsilon}.$$

Позначивши  $(X^T X)^{-1} X^T = A$ , одержимо

$$\vec{\beta}^* = \vec{\beta} + A\vec{\varepsilon}. \quad (4.40)$$

Для подальших досліджень доведемо, що:

$$\begin{aligned} AT &= (X^T X)^{-1} X^T (1 - X(X^T X)^{-1} X^T) = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T - (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} X^T = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T - (X^T X)^{-1} X^T = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Оскільки  $e = y - X\beta^*$ , то, враховуючи, що  $y = X\beta + \varepsilon$ ,  $\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T \cdot y$ , запишемо:

$$\begin{aligned} e &= X\beta + \varepsilon - X((X^T X)^{-1} X^T \cdot y) = X\beta + \varepsilon - X((X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon)) = \\ &= X\beta + \varepsilon - X\beta - X(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \varepsilon - X(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \\ &= (I - X(X^T X)^{-1} X^T) \varepsilon = T \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,

$$e = T \cdot \varepsilon. \quad (4.42)$$

Тоді, оскільки  $M(\varepsilon) = 0$ , і  $T^T = T$ .

$$\begin{aligned} \text{cov}(\beta^*, e^T) &= M(\beta^* - \beta)(e - \varepsilon)^T = M(\beta^* - \beta)e^T = \\ &= M(\beta + A\vec{\varepsilon} - \beta)(T \cdot \varepsilon)^T = M(A\vec{\varepsilon} \cdot \varepsilon^T T^T) = A \text{cov}(\varepsilon \cdot \varepsilon^T) T^T = \\ &= A \sigma_\varepsilon^2 I_n T^T = \sigma_\varepsilon^2 AT^T = \sigma_\varepsilon^2 AT = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Таким чином,  $cov(\vec{\beta}^*, e^T) = 0$ , тобто зв'язок між  $\beta^*$  і  $e$  відсутній. Враховуючи, що  $S_e^2$  є функцією від  $e$ , маємо незалежність між  $\beta^*$  та  $S_e^2$ .

#### 4.8. Коефіцієнт детермінації

Коефіцієнт детермінації для множинної лінійної регресії дорівнює:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (4.43)$$

Це – не спадаюча функція від числа  $m$  регресорів  $x$ . Кожна нова змінна надає моделі додаткову інформацію і область невизначеності при цьому зменшується.

При обчисленні  $R^2$  для одержання її незміщених статистичних оцінок здійснюють поправку в чисельнику і знаменнику (4.43) на число ступенів вільності. Такий коефіцієнт називають скоригованим:

$$R_{\text{ск}}^2 = 1 - \frac{\frac{\sum e_i^2}{n-1}}{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-m-1}} = 1 - \frac{(n-1)\sum e_i^2}{(n-m-1)\sum (y_i - \bar{y})^2}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{\sum y_i^2}{(y_i - \bar{y})^2} = 1 - R^2,$$

остаточно одержуємо

$$R_{\text{нб}}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}. \quad (4.44)$$

Звідси випливає, що .

#### 4.9. Закони розподілу оцінок емпіричної регресії

Для перевірки значущості статистичних оцінок  $\beta_i^*$  і щоб знайти для них, а також для множинної лінійної регресії довірчі інтервали, необхідно визначити їхні закони розподілу, як випадкових величин.

Оскільки  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ , то випадковий вектор  $\varepsilon_i$  має  $n$ -вимірний нормальний закон розподілу  $N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$ .

Із рівності (4.11) випливає, що

$$\beta_i^* \sim N(\beta, \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1}).$$

Тоді компоненти вектора  $\beta^*$  будуть мати розподіли

$$\beta^* \sim N(\beta, \sigma_\varepsilon^2 c_{ii}), \quad (4.45)$$

а випадкова величина

$$\frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sigma_\varepsilon \sqrt{c_{ii}}} \sim N(0, 1). \quad (4.46)$$

Випадкова величина

$$(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m, \sigma_\varepsilon^2 x^T (X^T X)^{-1} x\right)$$

Позначимо

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m, \quad (4.47)$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m. \quad (4.48)$$

Тоді випадкова величина  $\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}}$  буде мати нормований нормальний закон розподілу ймовірностей.

$$\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}} \sim N(0; 1). \quad (4.49)$$

Для визначення законів розподілу ймовірностей випадкових величин  $S_\varepsilon^2$  і  $S_\varepsilon$  дослідимо випадковий вектор залишків  $\varepsilon_i$ . Відповідно до передумов МНК компоненти  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon_i$  мають нормальний закон розподілу із параметрами  $M(\varepsilon_i)=0$ ,  $D(\varepsilon_i)=\sigma_\varepsilon^2=\text{const}$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma)$ .

Тоді

$$\varepsilon \cdot T \cdot \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = (n-m-1) \sum \varepsilon_i^2.$$

Враховуючи що  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ , випадкова величина

$$\frac{\varepsilon \cdot T \cdot \varepsilon}{(n-m-1)\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-m-1), \quad (4.50)$$

буде мати розподіл  $\chi^2$  із  $k = n - m - 1$  ступенями свободи. Оскільки

$$e = TY = T(X\beta + \varepsilon) = TX\beta + T\varepsilon = T\varepsilon,$$

і враховуючи те, що  $TX = 0$ , і  $T^T = T$

$$e^T = (Ty)^T = y^T T^T = (X\beta + \varepsilon)^T T^T = \beta^T X^T T^T + \varepsilon^T T^T = \varepsilon^T T^T, \text{ і}$$

$$\bar{e} \cdot \bar{e} = \bar{\varepsilon}' T T \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}' T \bar{\varepsilon},$$

оскільки  $T^T \cdot T = T$ , випадкова величина (4.50) має розподіл  $\chi^2$  із  $k = n - m - 1$  ступенями свободи.

$$\frac{e \cdot e^T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1).$$

Отже, доведено, що

$$S_\varepsilon^2 \sim \chi^2(n-m-1), \quad (4.51)$$

$$S_{\varepsilon} \sim \chi(n-m-1), \quad (4.52)$$

тобто відповідно мають розподіл  $\chi^2$  і розподіл  $\chi$  із  $k = n - m - 1$  ступенями вільності.

Враховуючи те, що  $\beta_i^*$  і  $e$  незалежні, випадкова величина  $t$  має розподіл Стюдента із  $k = n - m - 1$  ступенями вільності:

$$t = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}} \sim t(n-m-1). \quad (4.53)$$

Аналогічно, для функції регресії маємо випадкову величину

$$\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}} \sim t(n-m-1), \quad (4.54)$$

яка має  $t$ -розподіл із  $k = n - m - 1$  ступенями свободи, де

$$S_{y_i^*} = S_{\varepsilon} \sqrt{X^T (X^T X)^{-1} X}^T. \quad (4.55)$$

Враховуючи те, що

$$\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m), \quad (4.56)$$

а

$$\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2 (n-m-1)} \sim \chi^2(n-m-1),$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sum e_i^2}$$

$$\text{то відношення } \frac{m}{n-m-1} \sim F(k_1 = m, k_2 = n-m-1) \quad (4.57)$$

має розподіл Фішера із  $k_1 = m, k_2 = n - m - 1$  ступенями вільності.

#### 4.10. Довірчі інтервали теоретичної множинної лінійної регресії та її параметрів $\beta_i$

Для побудови довірчих інтервалів оцінок параметрів  $\beta_i$  використовують співвідношення (4.53). Із надійністю  $\gamma$  цей інтервал визначається за умови, що

$$P \left( \left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma. \quad (4.58)$$

Враховуючи що  $\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1}} \cdot c_{ii} = S_{\beta_i^*}$  є незміщеною оцінкою середньоквадратичного відхилення для  $\beta_i^*$ , вираз (4.58) набуде такого вигляду:

$$P \left( \left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma$$

або

$$P \left( \beta_i^* - t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} \right) = \gamma. \quad (4.59)$$

Тобто, із заданою надійністю  $\gamma$  параметр  $\beta_i$  буде міститися в проміжку

$$\beta_i^* - t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k) S_{\beta_i^*}, \quad (4.60)$$

де  $t(\gamma, k)$  знаходиться по таблиці (додаток 1,2) за заданою надійністю  $\gamma$  і числом ступенів вільності  $k = n - m - 1$ .

Аналогічно для побудови довірчого інтервалу для теоретичної множинної лінійної функції регресії із заданою надійністю  $\gamma$  використовується рівність

$$P\left(\left|\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}}\right| \sim t(\gamma, k)\right) = \gamma, \quad (4.61)$$

або

$$y_i^* - t(\gamma, k)S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k)S_{y_i^*}, \quad (4.62)$$

де  $y_i^*$ ,  $S_{y_i^*}$  визначаються за формулами (4.17), (4.53) для фіксованих значень вектора  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Якщо до значень  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m$  додати можливі відхилення залежної змінної  $Y$  від функції регресії, то до дисперсії  $D(y_i^*)$  необхідно додати дисперсії випадкової величини  $\varepsilon_i$ , яка дорівнює  $\sigma_\varepsilon^2$ . Однак, враховуючи, що  $\sigma_\varepsilon^2$  невідома величина, використовуємо її точкову незміщену статичну оцінку  $S_\varepsilon^2$ :

$$\left(S_{y_i^*}^*\right)^2 = S_\varepsilon^2 \left( I + x^T (X^T X)^{-1} x \right). \quad (4.63)$$

Довірчий інтервал для  $y_i$  буде дорівнювати

$$y_i^* - t(\gamma, k)S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k)S_{y_i^*}. \quad (4.64)$$

#### 4.11. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії

Статистична значущість коефіцієнтів теоретичної множинної лінійної регресії із  $m$  регресорами здійснюється на основі  $t$ -статистики,

$$t_{\beta_i}^* = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.65)$$

яка має розподіл Стюдента із  $k = n - m - 1$  ступенями вільності.

Для заданого рівняння  $\alpha$  значущості здійснюється перевірка правдивості статистичної гіпотези  $H_0: \beta_i = 0$  при альтернативній гіпотезі  $H_\alpha: \beta_i \neq 0$ .

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови двобічної критичної області. Враховуючи те, що  $t$ -розподіл визначається парною диференційною функцією, то за заданим значенням  $\alpha$  і числом ступенів вільності  $k = n - m - 1$  знаходиться критичне значення  $t''_{кр} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right)$  по таблиці (додаток 2).

Враховуючи те, що  $\left| t'_{\varepsilon\delta} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right) \right| = t''_{\varepsilon\delta} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right)$ , тобто критичні точки симетрично розташовані відносно нуля, область прийняття  $H_0$  дорівнюватиме

$$\left[ t^T_{кр} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right), t^{TT}_{кр} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right) \right].$$

Спостережуване значення статистичного критерію обчислюється за формулою

$$t^*_{\beta_i} = \frac{\beta_i^*}{S_{\beta_i^*}}. \quad (4.66)$$

Якщо  $|t^*_{\beta_i}| \in \left[ t^T_{кр} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right), t^{TT}_{кр} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right) \right]$ , то коефіцієнти  $\beta_i$  вважаються

статистично незначущими, тобто вони статистично близькі до нуля. Це буде означати, що фактор  $X_i$  лінійно не пов'язаним із залежною змінною  $Y$  і його присутність в моделі можна вважати зайвою із статистичної точки зору.

При виявленні такої ситуації рекомендується вивести  $X$  із моделі, що не викличе зниження її якості, але надасть більш чіткої конкретності.

Якщо

$$|t^*_{\beta_i}| \notin \left[ t^T_{\varepsilon\delta} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right), t^{TT}_{\varepsilon\delta} \left( \frac{\alpha}{2}; k \right) \right],$$

то коефіцієнти  $\beta_i$  вважаються статистично значущими, фактор  $X_i$  має вплив на залежну змінну  $Y$ .



#### 4.12. Перевірка загальної якості множинної лінійної регресії

Після оцінювання індивідуальної статистичної значущості кожного із коефіцієнтів регресії  $\beta_i$  здійснюється сукупна перевірка коефіцієнтів, тобто перевіряється на правдивість статистична гіпотеза:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$$

для заданого рівня довіри  $\alpha$ .

Якщо  $H_0$  не відхиляється, то можна зробити висновок, що сукупний вплив всіх  $m$  пояснювальних змінних на залежну змінну  $Y$  можна вважати статистично не суттєвим, а загальна якість рівняння регресії низька.

Перевірку цієї гіпотези можна здійснити на основі дисперсійного аналізу, де порівнюються пояснювальна  $\left(\frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m}\right)$  та залишкова  $\left(\frac{\sum e_i^2}{n-m-1}\right)$  дисперсії.

У цьому разі нульова гіпотеза набуває такого формулювання:

$$H_0 : \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} = \frac{\sum e_i^2}{n-m-1},$$

за альтернативної гіпотези

$$H_\alpha : \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} > \frac{\sum e_i^2}{n-m-1}.$$

Для перевірки правдивості  $H_0$  береться статистичний критерій

$$F = \frac{\frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m}}{\frac{\sum (y_i - y_i^*)^2}{n-m-1}} = \frac{(n-m-1) \sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m \sum (y_i - y_i^*)^2}, \quad (4.67)$$

який має розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  ступенями вільності і який визначений на інтервалі  $[0, \infty)$ .

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови правобічної критичної області. Критична точка для неї визначається за заданим  $\alpha$  і числом ступенів вільності  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  по таблиці  $F$ -критерію (додаток 3).

Спостережуване значення критерію  $F_{\text{сп}}^*$  обчислюється за формулою (4.67). Якщо  $F_{\text{сп}}^* > [F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)]$ , то  $H_0$  відхиляється на користь  $H_\alpha$ . Це означає, що пояснювальна дисперсія є суттєво більшою залишкової, а це інформує про те, що рівняння регресії якісно моделює динаміку зміни  $Y$ .

За умови  $F_{\text{сп}}^* \in [0, F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)]$  немає підстави для відхилення  $H_0$ . А це означає, що пояснювальна дисперсія буде спільновимірною із дисперсією, викликану впливом випадкових факторів. Це дає підстави стверджувати, що сукупний вплив пояснювальних змінних моделі на залежну змінну  $Y$  несуттєвий, а тому якість моделі в цьому випадку буде низькою.

На практиці частіше замість вище розглянутої гіпотези перевіряється на правдивість тісно з нею пов'язана гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}, \quad (4.68)$$

де  $\frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$  визначає частку розсіювання залежної змінної  $Y$  відносно емпіричної регресії.

Отже, необхідно перевірити правдивість  $H_0: R^2 = 0$  при альтернативній  $H_\alpha: R^2 > 0$ . За статистичний критерій вибирається випадкова величина

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \quad (4.69)$$

яка має розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  ступенями вільності.

Статистичний критерій (8.69) отримано із F-статистики

$$F = \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{\sum (y_i - y_i^*)^2} \cdot \frac{(n-m-1)}{m},$$

якщо чисельник і знаменник розділити на  $\sum (y_i - \bar{y})^2$ .

Із (4.69) випливає, що  $F = 0$ , якщо  $R^2 = 0$ .

Отже, для перевірки статистичної гіпотези  $H_0 : F = 0 (R^2 = 0)$  для заданого рівня значущості  $\alpha$  по таблиці (додаток 3) знаходиться який буде визначати критичну область  $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2; \infty)$ .

Обчисливши спостережуване значення критерію, за формулою (4.69) визначаємо:

1) якщо  $F_{cn}^* > F_{кр}$ , то  $H_0$  відхиляється, а це рівнозначно твердженню, що  $R^2 > 0$ , тобто  $R^2$  є статистично значущим. У цьому разі можна зробити висновок, що рівняння регресії достатньо якісно моделює динаміку зміни залежної змінної  $Y$ ;

2) якщо  $F_{cn}^* < F_{кр}$ , то немає підстав для відхилення  $H_0$ ,  $R^2 = 0$ , а це інформує про те, що сукупний вплив регресорів моделі несуттєвий, а значить, якість моделі в цьому випадку низька.

Приклад 4.1. Знайти залежність ціни автомобіля ( $Y$ ) від віку автомобіля ( $X_1$ ) та об'єм двигуна ( $X_2$ ) на основі вибірових даних (табл.4.1).

Припустимо, що існує лінійна залежність:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Необхідно:

- 1) обчислити статистичну оцінку вектора  $\vec{\beta}$ ;
- 2) проаналізувати ступінь адекватності побудованої моделі вибіровим даним;
- 3) виконати дисперсійний аналіз моделі та обчислити коефіцієнт множинної детермінації  $R^2$ ;
- 4) перевірити статистичну значущість коефіцієнта детермінації на основі критерію Фішера;

5) визначити дисперсії  $S_{\beta_0^*}^2, S_{\beta_1^*}^2, S_{\beta_2^*}^2$  та середньоквадратичні відхилення  $S_{\beta_0^*}, S_{\beta_1^*}, S_{\beta_2^*}$  для статистичних оцінок  $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*$

6) для заданої надійності  $\gamma = 0,95$  побудувати довірчі інтервали параметрів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ;

7) одержати прогнозне значення  $y_p^*$  та побудувати для нього із надійністю  $\gamma = 0,95$  довірчі інтервали.

Таблиця 4.1

№ з/п	Ціна автомобіля (Y), ум. од.	Вік автомобіля (X <sub>1</sub> ), роки	Об'єм двигуна автомобіля (X <sub>2</sub> ) дм <sup>3</sup>
1	11	6	3
2	3,2	10	1,3
3	8,7	10	1,8
4	1,6	16	1,8
5	17	2	2,4
6	18,9	4	4
7	15,8	3	2
8	18	6	3
9	19	3	4
10	6	6	1,6
11	13	6	2,6
12	22,7	5	2,1
13	13,9	3	2
14	10,9	3	1,5
15	9,5	8	2,6
16	28	3	2,2
17	6	8	1,8
18	5,8	9	1,6
19	2,8	11	1,6
20	26	1	2,2
21	10,5	6	2
22	16,9	7	2,3
23	3,4	9	1,5

24	14	1	1,4
25	23	1	1,8
Середнє	13,024	5,88	2,164

Розв'язування:

1. *Обчислення статистичної оцінки для вектора  $\beta$ .*

Емпіричний вектор  $\beta^*$  визначимо, за формулою (4.10):

$$\beta^* = (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot y, \text{ де}$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,67227 & -0,02897 & -0,21347 \\ -0,02897 & 0,00330 & 0,00441 \\ -0,21347 & 0,00441 & 0,08667 \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 325,6 \\ 1400,4 \\ 762,95 \end{pmatrix}.$$

Статистичні оцінки параметрів моделі:

$$\beta_0^* = 15,46; \beta_1^* = -1,44; \beta_2^* = 2,79.$$

Тоді залежність ціни автомобіля від його вік об'єму двигуна має вигляд:

$$y_i^* = 15,4608 - 1,4417x_{i1} + 2,7914x_{i2}.$$

2. *Аналіз ступеня адекватності побудованої моделі вибіркоvim даним*

Обчислимо вектор  $y_i^*$  за формулою

$$y_i^* = X\beta^*,$$

результати розрахунків наведено в табл. 4.2.

Правильність виконаних розрахунків можна перевірити, порівнюючи середні значення  $y$  та  $y^*$ , де

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = 13,024; y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^*}{n} = 13,024$$

оскільки  $y=y^*$ , попередні розрахунки правильні.

Визначимо ступінь адекватності моделі за статистичними даними табл.4.2. через відхилення між фактичними значеннями та обчисленими за моделлю. Запишемо їх як елементи вектора  $e$ :

$$e_i = y_i - y_i^*.$$

Таблиця 4. 2

№	$y_i^*$	$e_i = y_i - y_i^*$	$e_i^2$	$y_i^* - y$	$(y_i^* - y)^2$	$y_i - y$	$(y_i - y)^2$
1	15,18	-4,18	17,5 1	2,16	4,668	-2,024	4,096
2	4,67	-1,47	2,16	-8,35	69,75	-9,824	96,51
3	6,06	2,63	6,92	-6,956	48,38	-4,324	18,69
4	-2,58	4,18	17,4 9	-15,61	243,56	-11,42	130,51
5	19,27	-2,27	5,18	6,253	39,09	3,976	15,81
6	20,85	-1,95	3,83	7,836	61,39	5,876	34,52
7	16,71	-0,91	0,84	3,694	13,64	2,776	7,71
8	15,18	2,81	7,92	2,161	4,66	4,976	24,76
9	22,3	-3,3013	10,8 9	9,277	86,068	5,976	35,71
10	11,27	-5,276	27,8 4	-1,747	3,05	-7,024	49,33
11	14,06	-1,068	1,14 1	1,044	1,09	-0,024	0,0006
12	14,11	8,586	73,7 1	1,090	1,188	9,676	93,62
13	16,71	-2,818	7,94	3,694	13,64	0,876	0,767
14	15,32	-4,42	19,5 6	2,299	5,28	-2,124	4,511
15	11,18	-1,68	2,83	-1,839	3,38	-3,524	12,41
1	17,27	10,723	114,	4,253	18,08	14,97	224,28

6			98				
17	8,95	-2,95	8,71	-4,073	16,59	-7,024	49,33
18	6,95	-1,15	1,325	-6,073	36,88	-7,224	52,18

*Продовження таблиці 4.2.*

19	4,06	-1,26	1,607	-8,956	80,21	-10,22	104,53
20	20,16	5,83	34,103	7,136	50,92	12,97	168,37
21	12,39	-1,89	3,584	-0,631	0,39	-2,524	6,37
22	11,78	5,111	26,12	-1,235	1,525	3,876	15,023
23	6,67	-3,27	10,71	-6,352	40,34	-9,624	92,62
24	17,92	-3,92	15,42	4,903	24,03	0,976	0,952
25	19,04	3,956	15,65	6,020	36,23	9,976	99,52
Сума	325,6	0	438,01	--	904,12-	--	1342,18

Середнє значення  $e = 0$ , отже, розбіжностей не існує, модель адекватна.

### 3. Дисперсійний аналіз моделі та обчислення коефіцієнта $R^2$

Проведемо дисперсійний аналіз побудованої моделі. Відомо, що

$$y = y_i^* + e.$$

Можна довести, що й для дисперсій цих змінних виконується рівність

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i^* - y)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2.$$

**4. Перевірка статистичної значущості коефіцієнта множинної детермінації  $R^2$  за критерієм Фішера**

Для перевірки статистичної значущості впливу регресорів на залежну змінну моделі використовуємо статистичний критерій Фішера

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}.$$

Для рівня значущості  $\alpha=0,05$  та ступенях вільності  $k_1 = m = 2$ , і  $k_2 = n - m - 1 = 22$  за таблицею (додаток 3) знаходимо  $F(\alpha; k_1; k_2) = 3,44$ .

Спостережуване значення критерію Фішера:

$$F^* = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,6736}{1-0,6736} \cdot \frac{22}{2} = 22,7.$$

Критерій Фішера має правобічну критичну область із критичною точкою. Оскільки  $F^* > F(\alpha; k_1; k_2)$ , то статистична гіпотеза  $H_0: R^2 = 0$  відхиляється, отже, всі регресори мають вплив на залежну змінну.

5. Оцінювання дисперсій оцінок параметрів  $\mathbf{S}_{\beta_0}^2, \mathbf{S}_{\beta_1}^2, \mathbf{S}_{\beta_2}^2$ , та їх стандартних помилок  $\mathbf{S}_{\beta_0}, \mathbf{S}_{\beta_1}, \mathbf{S}_{\beta_2}$ . Незміщена оцінка для дисперсії залишків  $\sigma_\varepsilon^2$ :

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-m-1} \cdot \sum e_i^2; S_\varepsilon^2 = \frac{1}{22} \cdot 438 \approx 19,9.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів:

$$\text{cov}\left(\beta^* \cdot (\beta^*)^T\right) = S_\varepsilon^2 \cdot (X^T X)^{-1};$$

$$\text{cov}\left(\beta^* \cdot (\beta^*)^T\right) = \begin{pmatrix} 13,3861 & -0,5768 & -4,2505 \\ -4,2505 & 0,0658 & 0,0878 \\ -4,2505 & 0,0878 & 1,7257 \end{pmatrix}$$

Звідки дисперсії оцінок параметрів

$$S_{\beta_0}^2 = 13,3861; S_{\beta_1}^2 = 0,0658; S_{\beta_2}^2 = 1,7257.$$



Середньоквадратичні відхилення оцінок параметрів:

$$S_{\beta_0^*} = \sqrt{S_{\beta_0}^2} = 3,6587; S_{\beta_1^*} = \sqrt{S_{\beta_1}^2} = 0,2565;$$

$$S_{\beta_2^*} = \sqrt{S_{\beta_2}^2} = 1,3137.$$

6. *Перевірка статистичної значущості оцінок параметрів  $\beta_0, \beta_1$ , та  $\beta_2$ .* Сформулюємо нульову гіпотезу  $H_0: \beta_i = 0$  за альтернативної гіпотези  $H_a: \beta_i \neq 0$ :

$$t_{\beta_j^*}^* = \frac{\beta_j^* - 0}{S_{\beta_j^*}}, j = 0, 1, 2; t_{\beta_0^*}^* = \frac{15,4608}{3,6587} = 4,22;$$

$$t_{\beta_1^*}^* = \frac{1,4417}{0,2565} = 5,62; t_{\beta_2^*}^* = \frac{2,7914}{1,3137} = 2,12.$$

За обчисленими значеннями  $t_{\beta_i^*}^*$  знаходимо, що оскільки  $t_{\beta_j^*}^* > 2,074$  ( $j = 0, 1, 2$ ), то нульову гіпотезу  $H_0$  про рівність нулю параметрів  $\beta_0, \beta_1$  та  $\beta_2$  відхиляємо.

7. *Розрахунок довірчих інтервалів оцінок параметрів  $\beta_0, \beta_1$ , та  $\beta_2$  із надійністю  $\gamma = 0,95$ .*

$$(15,4608 - 3,6587 \cdot 2,074) < \beta_0 < (15,4608 + 3,6587 \cdot 2,074);$$

$$(-1,4417 - 0,2565 \cdot 2,074) < \beta_1 < (-1,4417 + 0,2565 \cdot 2,074);$$

$$(2,7914 - 1,3137 \cdot 2,074) < \beta_2 < (2,7914 + 1,3137 \cdot 2,074);$$

або

$$7,8726 < \beta_0 < 23,0489;$$

$$-1,9737 < \beta_1 < -0,9097;$$

$$0,0669 < \beta_2 < 5,5160.$$

На основі побудованої моделі можна зробити висновок, що ціна автомобіля, який міг би мати технічні характеристики, рівні середнім значенням  $x_1$  та  $x_2$  (див. табл.4.1), дорівнювала б завдяки  $\beta_0^* = 15,4608$

середньому значенню залежної змінної -  $y = 13,024$  тис. ум. од. Збільшення віку автомобіля на один рік зменшує ціну на 1,44 тис. ум. од., а збільшення об'єму двигуна на  $1\text{дм}^3$  приводить до збільшення ціни на 2,79 тис. ум. од.. Фактори, включені в модель, пояснюють "поведінку" ціни лише на 67,4%. Це можна пояснити тим, що на формування ціни на автомобіль мають вплив також інші фактори (престиж марки, тип двигуна, оснащення салону, колір тощо), які в даній моделі не враховано.

8. Розрахунок прогнозного значення  $y_p^*$  та побудова для нього із рівнем значущості  $\alpha = 0,95$  довірчих інтервалів

Оскільки значення ціни на автомобіль суттєво залежить від його віку та об'єму двигуна, доцільно розрахувати точковий прогноз  $y_p^*$  та довірчі інтервали прогнозу. Для цього задамо вектор прогнозних значень незалежних змінних:  $\tilde{o}_p = (1 \ 5 \ 1,5)$ . Розрахуємо точкове прогнозне значення:

$$y_p^* = \tilde{o}_p \beta^* = 12,43.$$

Довірчі інтервали прогнозу визначаються як

$$y_p^* - s_p \cdot t_{\alpha/2, k} < y_p < y_p^* + s_p \cdot t_{\alpha/2, k}$$

де  $s_p$  — стандартна похибка прогнозу.

Визначимо стандартну похибку прогнозного значення  $s_p$

$$s_p = \sqrt{19,9119 \cdot \left[ 1 + (1 \ 5 \ 1,5) \cdot \begin{pmatrix} 0,67227 & -0,02897 & -0,21347 \\ -0,02897 & 0,00330 & 0,00441 \\ -0,21347 & 0,00441 & 0,08667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right]} = \text{та}$$

$$= \sqrt{21,6227} = 4,65$$

обчислимо нижню і верхню межу прогнозного значення  $y_p$ :

$$(12,4392 - 4,65 \cdot 2,064) < y_p < (12,4392 + 4,65 \cdot 2,064),$$

або

$$2,8416 < y_p < 22,0369.$$

Таким чином, ціна на автомобіль може коливатися приблизно від 2,8 до 22,0 тис. ум. од.. Це пояснюється тим, що різні марки легкових автомашин відрізняються й іншими технічними характеристиками.

*Контрольні запитання:*

- 1) Визначити поняття лінійної по параметрам моделі множинної регресії.
- 2) Записати математичну модель системи у вигляді множинної лінійної регресії.
- 3) Визначити поняття емпіричної моделі.
- 4) Навести алгоритм МНК оцінювання.
- 5) Визначити числові характеристики МНК оцінок та емпіричної функції регресії.
- 6) Сформулювати теорему Гаусса-Марива для множинної лінійної регресії.
- 7) Навести алгоритм визначення точкової незміщеної статистичної оцінки дисперсії.
- 8) Визначити поняття незалежності статистичних оцінок.
- 9) Визначити закони розподілу оцінок емпіричної регресії.
- 10) Визначити поняття довірчих інтервалів.
- 11) Визначити поняття статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії.
- 12) Навести алгоритм перевірки загальної якості множинної регресії.

*Література до розділу*

1. Іванюта І.Д., Рибалка В.І., Рудоміно-Дусятська І.А. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. – К.: Слово, 2006. – 272 с.
2. Толбатов Ю.А. Економетрика. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 288 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. – М. Мир, 1975
4. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их использование. – М.: Наука, 1968
5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.–М.: Мир, 1980

6. Жлуктенко В.І., Водзянова Н.К., Савіна С.С., Колодінська О.В. Економетрія//Під ред. С.І. Наконечного К.: Видавництво Європейського університету, 2005- 550 с.

## Розділ 5. Байєсівське оцінювання регресійних моделей і його редукція до МНК-оцінювання

### 5.1. Статистичні критерії оптимальності

Розглянемо статистично оптимальні методи оцінювання параметрів, засновані на мінімізації функціонала  $J$ , визначеного на ймовірнісних функціях від шуканих параметрів і сигналів. Такими функціями є щільності  $p$  розподілу ймовірності інформації при наявності невизначеності щодо оцінюваних параметрів  $\beta$ . Статично оптимальна оцінка

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} J(p(\beta / Y)), \quad (5.1)$$

де  $p(\beta / Y)$  – апостеріорна щільність розподілу, що залежить від апіорних щільностей розподілу параметрів, сигналів і перешкод, а також від інформації  $Y$ , отриманої з даних експерименту.

Байєсівський метод оцінювання ґрунтується на відомій формулі  $p(Y/\beta) = p(Y, \beta) = p(\beta / Y)p(Y)$ , звідки

$$p(\beta / Y) = p(Y/\beta) \cdot p(\beta) / p(Y), \quad (5.2)$$

де  $p(\beta / Y)$  – апостеріорна щільність ймовірності вектора невідомих параметрів  $\hat{\beta}$ , яка є найбільш повною характеристикою оцінки  $\beta$  за результатами вимірювань  $Y$ ;  $p(\beta)$  – апіорна щільність розподілу невідомих параметрів  $\beta$ ;  $p(Y / \beta)$  – умовна щільність ймовірності вимірювань  $Y$  при фіксованому  $\beta$ ;  $p(Y)$  – безумовна щільність ймовірності  $Y$ , тобто  $p(Y)$  – інтеграл за всіма компонентами вектора  $\beta$  в області їх завдання:

$$p(Y) = \int p(Y, \beta) d\beta. \quad (5.3)$$

Нехай

$$Y = X \cdot \beta - \varepsilon, \text{ тобто } Y = Y^* - \varepsilon, \quad (5.4)$$

де

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1(1) \dots x_n(1) \\ \dots\dots\dots \\ x_1(M) \dots x_n(M) \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(M) \end{bmatrix}.$$

Як видно з (5.4)  $p(Y/\beta)$  залежить від похибки, зумовленої шумом і неточністю моделі; за відомої щільності ймовірності похибки  $\varepsilon$  можна розрахувати щільність  $p(Y/\beta)$ .

У правій частині (5.2) всі ймовірності визначено і, отже, визначена бажана апостеріорна щільність ймовірності  $p(\beta/Y)$ . Показник  $J(p(\beta/Y))$  визначається через поняття функції втрат  $\tilde{N}(\delta\beta)$ , умовного та середнього ризику. У класі систем типу БАСІ, з метою узгодження головного і робочого показників  $I$  і  $J$ , функція втрат може задаватися у вигляді квадратичної форми від  $\delta\beta$ :

$$C(\delta\beta) = \delta I(\delta\beta) = \left( \frac{\partial I}{\partial \beta} \Big|_{\beta} \right)^T \delta\beta + \delta\beta^T \frac{\partial^2 I}{\partial \beta \partial \beta^T} \Big|_{\beta} \delta\beta, \quad (5.5)$$

де  $\hat{\beta}$  - відхилення оцінки  $\hat{\beta}$  від істинного значення  $\beta$  вектора параметрів моделі;

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} \Big|_{\beta} = \left( \frac{\partial I}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta}, \dots, \frac{\partial I}{\partial \beta_n} \Big|_{\beta} \right)^T$$

- - градієнт основного показника  $I$  по вектору  $\beta$ , обчислений для  $\hat{\beta} = \beta$ ;

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \beta \partial \beta^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial \beta_1^2} \Big|_{\hat{\beta}} & \dots & \frac{\partial^2 I}{\partial \beta_1 \partial \beta_n} \Big|_{\hat{\beta}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \beta_{1n} \partial \beta_{1n}} \Big|_{\hat{\beta}} & \dots & \frac{\partial^2 I}{\partial \beta_n^2} \Big|_{\hat{\beta}} \end{bmatrix} - \text{матриця других похідних}$$

від  $I$  по  $\beta$  в точці  $\hat{\beta} = \beta$ .

В реальній ситуації для формування (5.5) необхідно попередньо оцінити  $\beta$  методом, що не вимагає формування  $C(\delta\beta)$ , а потім шляхом імітаційного моделювання основного завдання (задачі оптимізації  $I$ ) знайти необхідні компоненти квадратичної форми (5.5). У класі традиційних систем ідентифікації застосовують функції втрат наступного виду:

$$\tilde{N}(\delta\beta) = C_0 - \delta(\hat{\beta} - \beta); \quad (5.6)$$

$$\tilde{N}(\delta\beta) = \|\hat{\beta} - \beta\|^2; \quad (5.7)$$

$$\tilde{N}(\delta\beta) = |\hat{\beta} - \beta|; \quad (5.8)$$

$$\tilde{N}(\delta\beta) = \begin{cases} 0, & |\hat{\beta} - \beta| < \Delta; \\ 1, & |\hat{\beta} - \beta| \geq \Delta, \end{cases} \quad (5.9)$$

де в правій частині (5.6)  $\delta$  означає дельта-функцію Дірака;

в (5.9)  $\Delta$  – допустима похибка оцінки  $\beta$ .

Умовний ризик  $r(\beta)$  визначено як середнє значення функції втрат для всіх можливих вибірок:

$$r(\beta) = \int C(\delta\beta) p(Y/\beta) dY, \quad (5.10)$$

де  $\int p(Y/\beta) dY = 1$ .

Середній ризик  $R = J(p(\beta/Y))$  в (5.10) визначається як середнє значення умовного ризику для всіх можливих значень  $\beta$ :

$$J = R = \int r(\beta) p(\beta) d\beta = \iint C(\delta\beta) p(Y/\beta) p(\beta) dY d\beta, \quad (5.11)$$

або, враховуючи (5.10) замінюючи  $p(Y/\beta) \cdot p(\beta)$  на  $p(\beta/Y) \cdot p(Y)$ ,  
отримуємо

$$R = \iint C(\delta\beta) p(\beta / Y) p(Y) dY d\beta = \int p(Y) dY \int C\left(\frac{\beta}{Y}\right) d\beta. \quad (5.12)$$

## 5.2. Методи оцінювання вектора $\beta$ лінійних моделей

Оцінка  $\hat{\beta}$  буде оцінкою мінімального ризику, якщо мінімізує (5.12). за наявності конкретної вибірки  $Y = (y(I), \dots, y(M))$  вектор  $Y$  слід розглядати як постійний детермінований. Тоді

$$\int p(Y) dY = C > 0$$

і в (5.12) для визначення  $\beta$  досить мінімізувати тільки внутрішній інтеграл по  $\beta$ :

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in G} \int C(\delta\beta) p(\beta / Y) d\beta, \quad (5.13)$$

де  $p(\beta/Y)$  визначено по (5.2).

На практиці безпосередньо визначити щільність  $p(\beta/Y)$  досить важко. Однак слід відзначити практично важливу властивість формули (5.2), яка проявляється при мінімізації (5.11): неточність завдання  $p(\beta)$  у (5.2) не робить істотного впливу на значення мінімального ризику (5.12). Крім того  $p(\beta)$  у (5.2) є регуляризуючим множником, оскільки відомо; що відносна точність оцінки щільності  $p(Y/\beta)$  і  $p(Y)$  істотно зменшується зі зменшенням значення  $p$ , тобто «хвосту» функції  $p(Y/\beta)$  і  $p(Y)$  визначені неточно, а точність визначення  $p(\beta/Y)$  залежить від  $p(\beta)$  у (5.5). Так, якщо припустити рівномірність розподілу  $\beta$  в області  $G$  з центром  $\beta_0$ :

$$\delta(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{|G|}, & \beta \in G, \\ 0, & \beta \notin G, \end{cases} \quad (5.14)$$

то, чим менше буде область  $G$ , тим менша частина неточних значень  $p(\beta/Y)$  пропадає в (5.2) і, отже, тим менше будуть дисперсії розподілу  $p(\beta/Y)$  та оцінки  $\beta$  за формулою (5.13). При стягуванні області  $G$  до  $\beta = \beta_0$  оцінка  $\beta$  також прагне до  $\beta = \beta_0$ . Якщо  $\beta_0$



задана неточно, то для кінцевої вибірки даних апостеріорна щільність (5.2) і оцінка (5.13) будуть зміщені. Розширення  $G$  приводить до збільшення дисперсії і зменшення зсуву до неточної оцінки  $\beta_0$  (5.13). Відзначимо, що (теоретично) оцінка (5.13) збігається з оцінкою, що відповідає *моді*  $p(\beta / Y)$  для функції втрат (5.6), *медіані* - для (5.8), *математичному сподіванню* - для (5.7) .

Якщо  $C(\delta\beta)$  не задано і  $p(\beta)$  невідома, то можна шукати оцінку  $\beta^*$ , відповідну максимуму  $p(\beta / Y)$  для конкретної реалізації  $Y = (y(1), \dots, y(M))^T$ . У цьому випадку  $p(\beta / Y)$  - функція правдоподібності  $L(Y, \beta)$ . Умова максимуму  $L$  або (в силу монотонності логарифма)  $\ln L$  являє собою відоме рівняння правдоподібності

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L(Y, \hat{\beta}) = 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(Y, \hat{\beta}) = 0, \quad (5.15)$$

де  $\hat{\beta}$  оцінка максимальної правдоподібності (МП).

Відсутність регулюючого множника  $p(\beta)$  в (5.15) погіршує стійкість оцінок (5.15) до аномальних даних.

Нарешті за повної невизначеності імовірнісних характеристик застосовують метод найменших квадратів (МНК), в рамках якого оцінка  $\beta$  визначається з урахуванням (5.4) з умови

$$\hat{\beta} = \arg \min \varepsilon^T \cdot \varepsilon \quad (5.16)$$

еквівалентної умові (5.15) у припущенні, що  $\varepsilon(k)$  представляє гаусівський "білий" шум з рівномірною інтенсивністю для будь-якого  $k \in (1, M)$ . Метод найменших квадратів є окремим випадком методу МПімаєті ж недоліки, тобто оцінки МНК чутливі до рідкісних великих викидів в даних експерименту. Перевагами їх є простота та відсутність необхідності знання імовірнісних

характеристик і функцій втрат. Рекурентна форма МНК збігається з байєсівським методом у випадку нормальності розподілів:

$$p(\beta) = C_1 \exp \left[ -0,5(\beta - \beta_0)^T P_0^{-1} (\beta - \beta_0) \right], \quad (5.17)$$

$$p(Y|\beta) = C_2 \exp \left[ -0,5(Y - X\beta)^T Q^{-1} (Y - X\beta) \right], \quad (5.18)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  - нормуючі множники, які обираються за умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} p(Y|\beta) dY = 1,$$

де  $\beta_0$  - апіорне значення вектора  $\beta$ ;  $P_0^{-1}$  матриця, зворотна коваріаційній матриці апіорних оцінок  $\beta_0 = M\{\beta\}$ ;  $P_0 = M(\beta - \beta_0) \times (\beta - \beta_0)^T$ ,  $M$  - оператор математичного очікування.

$$Q^{-1} = M\{\varepsilon \varepsilon^T\} = \begin{bmatrix} M\{\varepsilon(1)\varepsilon(1)\} & \dots & M\{\varepsilon(1)\varepsilon(M)\} \\ \dots & \dots & \dots \\ M\{\varepsilon(M)\varepsilon(1)\} & \dots & M\{\varepsilon(M)\varepsilon(M)\} \end{bmatrix}^{-1}$$

матриця, зворотна коваріаційній матриці нев'язки  $\varepsilon$ .

Можна показати, що

$$C_1 = (2\pi)^{-n/2} |P_0|^{-1/2}; \quad C_2 = (2\pi)^{-M/2} |Q|^{-1/2}.$$

Щільність розподілу  $P(Y)$ , враховуючи лінійність (5.4), теж буде нормальною з математичним очікуванням  $X\beta_0$  і дисперсійною матрицею

$$P = XP_0X^T + Q;$$

$$P(Y) = C_3 \exp[-0,5(Y - \tilde{O}\beta_0)^T P^{-1} (Y - X\beta_0)],$$

де

$$C_3 = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} |P|^{-\frac{1}{2}} = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} |XP_0X^T + Q|^{-\frac{1}{2}}.$$

Підставивши (5.17) - (5.19) в (5.2), отримаємо апостеріорну щільність ймовірності:

$$p\left(\frac{\beta}{X}\right) = C \cdot \exp \left\{ -0.5 \left[ (\beta - \beta_0)^T P_0^{-1} (\beta - \beta_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (Y - X\beta)^T Q^{-1} (Y - X\beta) - (Y - X\beta_0)^T P^{-1} (Y - X\beta_0) \right] \right\}.$$

Після ряду перетворень остаточно отримаємо, що

$$p\left(\frac{\beta}{\hat{O}}\right) = C \exp \left\{ -0.5 \left[ \left( \beta - \hat{\beta} \right)^T P^{-1} \left( \beta - \hat{\beta} \right) \right] \right\}, \quad (5.20)$$

де  $C$  - нормуюча константа,

$$\hat{\beta} = \beta_0 + PX^T Q^{-1} (Y - X\beta_0),$$

$$P = (P_0^{-1} + X^T Q^{-1} X)^{-1}. \quad (5.21)$$

Для симетричних функцій втрат мінімум середнього ризику досягається за умови  $\beta = \hat{\beta}$  (5.20), тобто оцінка (5.21) є Байєсівською. З іншого боку, якщо вважати  $\beta_0$  и  $P_0$  оцінками,  $P$  ( $M$ ), отриманими на  $M$ -му кроці, а  $\hat{\beta}_1$   $P$  - в результаті додавання ( $M + 1$ )-го виміру ( $Y(M + 1)$ ,  $X(M + 1)$ ), то (5.21) визначають рекурентний алгоритм байєсівського оцінювання вектора  $\hat{\beta}$  і його коваріації  $P$ . Так як  $P_0 = P_0^T$  і  $Q = Q^T$  (матриці  $P_0$  та  $Q$  симетричні), то у виразі (5.21) можна  $P$  перетворити:

$$(P_0^{-1} + X^T Q^{-1} X)^{-1} = P_0 - P_0 X^T [Q + X P_0 X^T]^{-1} X P_0. \quad (5.22)$$

Справедливість (5.22) можна довести, помноживши праві частини рівності на  $[P_0^{-1} + X^T Q^{-1} X]$ :

$$E = E - X^T [Q + X P_0 X^T]^{-1} X P_0 + X^T Q^{-1} X P_0 - X^T Q^{-1} X P_0 X^T [Q + X P_0 X^T]^{-1} X P_0,$$

де  $E$  - одинична матриця.

Спростимо і помножимо праву частину на :

$$0 = -X^T [Q + X^T P_0 X]^{-1} X + X^T Q^{-1} X - \\ -X^T Q^{-1} X P_0 X^T [Q + X P_0 X^T]^{-1} X;$$

Помноживши ліву частину на  $X$ , правую на  $X^T$  і позначивши  $XX^T = A$ , отримаємо

$$0 = -A[Q + X^T P_0 X]^{-1} A + A Q^{-1} A - A Q^{-1} X P_0 X^T * \\ * [Q + X P_0 X^T]^{(-1)} A.$$

Вважаючи існування  $A^{-1}$ , скоротивши  $A$ , помноживши ліворуч і праворуч на  $A^{-1}$ , отримаємо

$$0 = -[Q + X P_0 X^T]^{-1} + Q^{-1} - Q^{-1} X P_0 X^T [Q + X P_0 X^T]^{-1};$$

Помноживши праворуч на  $[Q + X^T P_0 X]$ , визначимо

$$0 = -E + Q^{-1} [Q + X P_0 X^T] - Q^{-1} X P_0 X^T; \\ 0 = Q^{-1} X^T P_0 X - Q^{-1} X^T P_0 X = 0,$$

щопідтверджує справедливість (5.22).

При рекурентному переході від  $M$ -й до  $(M + 1)$ -ї точки вибірки, поклавши

$$Q = \sigma_k^2 E,$$

(Це відповідає нестационарному, а при  $\sigma_k^2 = \text{const}$  — стационарному гауссівському білому шуму  $\varepsilon(k)$  в 5.4)) отримаємо, що у виразах (5.21), (5.22) частина векторних або матричних елементів заміниться скалярами:

$$Y = y(M + 1), X(M + 1) = x^T(M + 1) = (x_1(M + 1), \dots, x_n(M + 1));$$

$$Q^{-1}(M + 1) = \frac{1}{\sigma_{M+1}^2}.$$

Відповідно замість (5.21) і (5.22) знайдемо вирази для рекурентного взваженого методу найменших квадратів:

$$\begin{cases} \beta(M+1) = \beta(M) + P(M+1)x(M) \frac{1}{\sigma_M^2} (y(M) - x^T(M)\beta(M)); \\ P(M+1) = P(M) - P(M)x(M) \left[ x^T(M)P(M)x(M) + \sigma_M^2 \right]^{-1} x^T(M)P(M). \end{cases} \quad (5.23)$$

Якщо в (5.23) покласти  $\sigma_M^2 = 1$ , то

$$\begin{cases} \beta(M+1) = \beta(M) + P(M+1)x(M)(y(M) - x^T(M)\beta(M)); \\ P(M+1) = P(M) - P(M)x(M) \left[ x^T(M)x(M) + E \right]^{-1} x^T(M)P(M), \end{cases}$$

що відповідає звичайному рекурентному МНК.

Якщо  $P(0)$  та  $\beta(0)$  невідомі, то вважають, що

$$\beta(0) = 0, P(0) = \sigma_{\beta(0)}^2 E, \sigma_{\beta(0)}^2 \rightarrow \infty. \quad (5.24)$$

Якщо в (5.21) припустити невідомими  $\beta_0$  і  $P_0$ , і задати їх згідно (5.24), то отримаємо оцінку максимальної правдоподібності, яка збігається для нормальних розподілів  $P(\beta), P(y/\beta)$  з марківською оцінкою мінімальної дисперсії:

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} Y; P = (X^T Q^{-1} X)^{-1}. \quad (5.25)$$

Якщо в (5.21) прийняти  $\beta_0 = 0$  і  $P_0 = E\alpha$ ,  $Q = E$ , де  $E$  - одинична діагональна матриця, то знайдемо оцінку як нормальне регуляризоване по Тихонову рішення системи (5.4).

$$\hat{\beta} = (\alpha E + X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (5.26)$$

де  $\alpha$  - регуляризуючий параметр.

Для  $\alpha=0$  из (5.26) виходить оцінка звичайного МНК:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (5.27)$$

Оцінювання  $\beta$  ускладнюється, якщо матриця  $X$  у формулі (5.4) являє собою адитивну суміш точних значень  $x_i^*(k)$  і перешкоди  $N_i(k)$ , тобто замість теоретичної моделі (4.4) маємо емпіричну модель (4.5), де не тільки  $Y$ , а й  $X$  вимірюються з похибками  $N_y = \varepsilon, N_x$ :

$$x^* + N = \begin{bmatrix} x_1^*(1) + N_1(1) \dots x_n^*(1) + N_n(1) \\ \vdots \\ x_1^*(M) + N_1(M) \dots x_n^*(M) + N_n(M) \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

На практиці така задача зустрічається частіше, ніж (5.4).

Для визначення можливості застосування МНК (5.27) до вирішення задачі оцінювання  $\beta$  в моделі порівнюємо зміщення та дисперсії оцінок (5.27), отриманих похибок для моделей (5.4) і (5.28). Для моделей (5.4), вважаючи, що:

$$M\{\varepsilon\}=0, M\{\varepsilon^T Y\}=0, M\{\varepsilon^T X\}=0, \quad (5.29)$$

з (5.27) знаходимо

$$\begin{aligned} M\left\{\hat{\beta}\right\} &= M\left\{\left(X^T X\right)^{-1} X^T Y\right\}= \\ &= \left(X^T X\right)^{-1} X^T M(Y)= \\ &= \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y^*=C Y^*, \\ C &=\left(X^T X\right)^{-1} X^T . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Тобто оцінка  $\beta$  в моделі (5.4) незміщена, а коваріація

$$\begin{aligned}
\text{cov}\left[\hat{\beta}\right] &= M\left\{(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)^T\right\} = M\left\{(CY-\beta)(CY-\beta)^T\right\} = \\
&= M\left\{(CY^* + C\varepsilon - \beta)(CY^* + C\varepsilon - \beta)^T\right\} = \\
&= M\left\{C\varepsilon(C\varepsilon)^T\right\} = CM\left\{\varepsilon\varepsilon^T\right\}C^T = \\
&= CQC^T = (X^TX)^{-1}X^TQX(XX^T)^{-1},
\end{aligned} \tag{5.31}$$

де  $Q$  - коваріаційна матриця перешкод  $\varepsilon$ . Зокрема, якщо  $Q = \sigma^2 E$  матриця коваріації гаусівського білого шуму, то

$$\text{cov}\left[\hat{\beta}\right] = (X^TX)^{-1}X^T\sigma^2 EX(X^TX)^{-1} = \sigma^2(X^TX)^{-1}.$$

Для моделі (5.28), вважаючи  $\varepsilon$  і  $N$  некоррельованими, з урахуванням (5.29), отримаємо

$$\begin{aligned}
M\left\{\hat{\beta}\right\} &= M\{CY\} = M\left\{(C^* + \delta C(N))(Y^* + \varepsilon)\right\} \\
&= M\left\{(C^* + \delta C(N))Y^*\right\} = \beta + M\left\{(\delta C(N))Y^*\right\},
\end{aligned} \tag{5.32}$$

де  $M\left\{(\delta C(N))Y^*\right\}$  - математичне сподівання зміщення  $\delta\beta$ .

Розділити  $C$  на точну компоненту  $C^*$  і варіацію  $\delta C$ , викликану перешкодами  $N$  в  $X$ , судячи з виразу

$$\tilde{N}^* = \left[(X^* + N)^T(X^* + N)\right]^{-1}(X^* + N)^T = C^* + \delta C(N),$$

непросто. Вважаючи, некоррельованими  $X^*$  і  $Y^*$  з  $N$ , з урахуванням (5.32) знайдемо

$$\begin{aligned}
 M \left\{ \hat{\beta} \right\} &= M \left\{ CY^* \right\} = M \left\{ C \right\} Y^* = \\
 &= \left[ (X^*)^T X^* + M \left\{ N^T N \right\} \right]^{-1} (X^*)^T Y^*,
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

Якщо перешкоди  $N_i$  у  $x_i$  для простоти вважати взаємно-і автонекорельованими і гауссовськими білими шумами рівномірної по  $k$  інтенсивності  $\sigma_i^2$ , то матриця  $M \left[ N^T N \right]$  в (5.33) буде діагональною:

$$M \left[ N^T N \right] = M \text{diag} \sigma_i^2 E.$$

Тоді

$$M(\hat{\beta}) = [(X^*)^T X^* + \text{diag} \sigma_i^2 M E]^{-1} (X^*)^T Y^*. \tag{5.34}$$

Звідси видно, що оцінки  $\hat{\beta}_i$  компоненти  $\beta_i$  вектора  $\beta$  будуть занижені за абсолютним значенням на величину  $\delta \hat{\beta}_i$ , залежно від обумовленості матриці  $(X^*)^T X^*$  і від відношення  $(x_i^*)^T x_i^*$  до  $\sigma_i^2 M$ . Чим більше це відношення тим менше абсолютне значення зміщення  $\delta \hat{\beta}_i$ -го параметра  $\beta_i$  і навпаки. Відносне зміщення  $\delta \hat{\beta}_i / \beta_i$ , залежить від абсолютного значення  $\beta_i$ . Позначивши в (5.33)

$(X^*)^T (\hat{X}^*)^T X^* X^* = A$ ;  $M \left\{ N^T N \right\} = \delta A$ ;  $(X^*)^T Y^* = B$ , маємо змогу показати, що

$$-\delta \beta = (A^* + \delta A)^{-1} \delta A B. \tag{5.35}$$

Дійсно, прирівнюючи ліві частини виразу

$$[A^* + \sigma A] \hat{\beta} = B^*, A^* \beta = B^*,$$

отримаємо



$$\delta A \hat{\beta} = -A * (\hat{\beta} - \beta) = -A * \delta \beta \quad \text{або} \quad \delta A (\sigma \beta + \beta) = -A * \sigma \beta ,$$

звідки витікає вираз (5.35). Взагалі:

$$\delta \beta \rightarrow 0, \quad \hat{\beta} \rightarrow \beta, \quad \text{якщо} \quad \|\delta A\| \rightarrow 0;$$

$$\delta \beta \rightarrow \beta, \quad \hat{\beta} \rightarrow 0, \quad \text{якщо} \quad \|\delta A\| \rightarrow \infty;$$

Коваріація оцінок (5.27) для моделі (5.28) відповідно (5.31) та (5.33) буде:

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M \left\{ (\hat{\beta} - M\{\beta\}) (\hat{\beta} - M\{\beta\})^T \right\}. \quad (5.36)$$

Щоб проаналізувати величину  $\text{cov}[\hat{\beta}]$ , подамо  $\hat{\beta}$  для (5.36) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T Y = \\ &= [X^{*T} X^* + M\{N^T N\} + \varepsilon(X^*, N)]^{-1} (X^* + N)^T (Y^* + \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.37)$$

де  $\varepsilon(X^*, N)$ -випадкова складова.

Очевидно, що зі збільшенням довжини вибірок детерміновані складові виразу (5.37) зростають, так як їх елементи складають суми по дискетам часу  $k$  відповідних виразів:

$$\sum_{k=1}^M x_i^*(k) x_i^*(k) \left( i, j = \overline{1, n}; k = \overline{1, M} \right), \quad \sum_{k=1}^M N_i(k) N_i(k).$$

Випадкова складова  $\varepsilon(X^*, N)$ , елементи якоїс відхилення елементів

$$\sum_{k=1}^M x_i(k) x_j(k), \quad \sum_{k=1}^M N_i(k) N_j(k)$$

від їх математичних очікувань, з ростом довжини вибірки зменшується за рахунок усереднювання по дискетам  $k$ . Тоді, для великих вибірок коваріація (5.36) наближено дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\approx M \left\{ \begin{bmatrix} \left( (X^*)^T X^* + M \{N^T N\} \right)^{-1} (X^* + N)^T (Y^* + \varepsilon) - \\ - \left( (X^*)^T X^* + M \{N^T N\} \right)^{-1} (X^*)^T Y^* [\cdot]^T \end{bmatrix} \right\} = \\ &= M \left\{ \begin{bmatrix} \left( (X^*)^T X^* + M \{N^T N\} \right)^{-1} \left( (X^*)^T \varepsilon + N^T Y^* + N^T \varepsilon \right) \end{bmatrix} [\cdot]^T \right\} \end{aligned}$$

де  $[\cdot]$  - позначено попередній вираз в квадратних дужках.

Позначимо:

$$\begin{aligned} \left( X^{*T} X + M \{N^T N\} \right)^{-1} X^{*T} &= C_1; \\ \left( X^{*T} X + M \{N^T N\} \right)^{-1} X^{*T} &= C_2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Спираючись на взаємну некорильованість  $X^*$ ,  $\varepsilon N$ ,  $Y$  та малість компонентів  $N^T \varepsilon$  порівняно з  $(X^*)^T \varepsilon$  або  $N^T Y$ , наближено отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\cong M \left\{ (C_1 \varepsilon + C_2 N)(C_1 \varepsilon + C_2 N)^T \right\} = \\ &= C_1 M \left\{ \varepsilon \varepsilon^T \right\} C_1^T + C_2 M \left\{ N N^T \right\} C_2^T = C_1 Q C_1^T + C_2 F C_2^T. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Неточність  $N$  в  $X$  з одного боку, покращує обумовність і приводить до зменшення величини зворотної матриці в із (5.38) порівняно з  $C$ , обрахованому в (5.30) що зменшує коваріацію  $\hat{\beta}$  (5.31), з іншого боку, збільшує  $\text{cov}[\hat{\beta}]$  за рахунок додаткового члена  $C_2 F C_2^T$  в (5.39). Таким чином, для  $N=0$  коваріація (5.39) співпадає з (5.31). Для  $\sigma_N$  з урахуванням (5.38),

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = \left[ M \{N^T N\} \right]^{-1} (Y^*)^T M \{N^T N\} Y^* \left[ M \{N^T N\} \right]^{-1}$$

Для випадку, якщо  $M \{N^T N\} = \sigma_N^2 M E$ , якщо  $\sigma_N^2 \rightarrow \infty$ , отримаємо  $\lim_{\sigma_N^2 \rightarrow \infty} \text{cov}[\hat{\beta}] = 0$ .

Таким чином, завади  $N$  в  $X$  мають регулюючі властивості: подібно тихоновським алгоритмам (5.26) вони призводять до зміщення оцінок  $\hat{\beta}$ , але зменшують їх дисперсію.

З розглянутого витікає, що безпосереднє використання баєсівського підходу складно. Практично діє рекурентний взважений МНК для нормального розподілу  $P(Y/\beta), P(\beta), P(Y)$ . Інший шлях (особливо якщо  $X = X^* + N$ ) полягає в попередній фільтрації змінних  $y(k)$  та  $x(k)$ , знаходження оцінок  $\hat{y}(k)$  та  $\hat{x}(k)$  та використання МНК до цих оцінок для визначення  $\hat{\beta}$  або (за наявності апіорної інформації про  $\hat{\beta}(0)$  рекурентного МНК (5.23) з точними значеннями  $\beta(0)$  і  $P(0)$ : чим точніше задані  $P(0)$  і  $\beta(0)$ , тим краще обумовлена матриця  $P(M+1)$  і точніше рішення  $\beta(M+1)$ . Через низьку стійкість МНК і других статистичних методів з квадратичними функціоналами якості до окремих викидів великої амплітуди у вихідних даних  $(Y, X)$  вони потребують аналізу даних і усунення цих викидів що практично реалізується на стадії первинної обробки даних  $(Y, X)$  і на основі мінімаксних методів оцінювання.

Статистично оптимальні методи дають хороші оцінки (в статистичному сенсі) для достатньо приставницьких підборок або достатньо точних апіорних даних про закони розподілення. Наприклад, для нормального закону розподілу випадкової величини, оцінка ймовірності появи реалізацій, менших конкретного значення, на вибірці з  $M$  статистично незмінних вимірювань при ймовірності 0,95 і допустимій погрішності 20 %, потребує від десятків до десятків тисяч незалежних вимірювань, тобто експериментально оцінити малі ймовірності неможливо.

В умовах обмежених вибірок за відсутністю або обмеженістю апіорних даних отримання квазіоптимальних оцінок  $\beta$  можливо в системах класу БАСІ (табл. 1.1), де метод, модель, параметри методу і моделі підбирають, виходячи з показника  $I$  якості рішення основної задачі. При цьому більш прості методи, задані з точністю до невідомих оптимізуючих по  $I$  констант, по своїй ефективності, можуть наближатися до статистично оптимальних.

### 5.3. Загальний алгоритм нелінійного оцінювання параметрів

Розглянемо універсальний алгоритм, який об'єднав різні алгоритми МНК, Гауса-Ньютона, Баєса, Маркова, Тихонова з розширеним вектором констант  $\sigma$ , які дозволяють оптимізувати задачу ідентифікації лінійних і не лінійних, безперервних за головним показником  $I$  і дискретних, стаціонарних і нестаціонарних, одно і багатомірних, детермінованих і стахостичних об'єктів, з однієї і декількох вибірок даних  $(X, Y)$ . В загальному випадку:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & \dots & y_m(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(m) & \dots & y_m(M) \end{bmatrix},$$

$$x_i(k) = x_i^*(k) + N_i(k), \quad i = \overline{1, n}; n \geq m;$$

$$y_j(k) = y_j^*(k) + \varepsilon_j(k), \quad j = \overline{1, m}; k = \overline{1, M}; M \geq n,$$

де  $x_i^*, y_j^*$  - точні значення,  $N_i, \varepsilon_j$  - їх випадкові взаємнекорельовані похибки, тобто для будь-якого зсуву  $\tau$ , та будь-яких  $i, \varepsilon$ ,  $R_{N_i N_e}(\tau) = R_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\tau) = R_{x_i^* N_j} = R_{N_i y_j^*}(\tau) = 0$ , якщо  $i \neq j$ . Модель об'єкта ідентифікації

$$y^* = f(x^*, \beta, t),$$

де

$$f^T = [f_1, \dots, f_m]. \quad (5.40)$$

Зокрема, якщо  $y^* = \dot{x}_1^*$ ,  $x_2^* = u$ ,  $(x_1^*, x_2^*) = x^*$ , то модель (5.40) еквівалентна системі нелінійних диференційних рівнянь

$$x_1^* = f(x_1^*, u, \beta, t), \quad (5.41)$$

які описують динаміку об'єкта керування, де  $u$ -керуючі змінні; якщо  $y^* = x_1^*(k+1)$ ,  $x_1^* = u(k)$ , то рівняння (5.40) еквівалентно системі нелінійних різницьових рівнянь

$$x_I^*(k+1) = f(x_I^*(k), u(k), \beta, k). \quad (5.42)$$

Варіюючи розмірностями відповідних векторів, можна отримати системи зі скалярними або векторними змінними.

*Узагальнений критерій якості задачі ідентифікації*

$$J = \sum_{p=1}^4 J_p \quad (5.43)$$

складено з чотирьох компонентів.

*Перша компонента критерію (5.43)*

$$J_1 = \sum_{p=1}^m \varepsilon_j^T Q_j^{-1} \varepsilon_j, \varepsilon_j^* = \varepsilon_j - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta)^T} \Delta \beta,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta)^T} = \left( \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta_1)}, \dots, \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta_s)} \right), \varepsilon_j = \varepsilon_j \left( \hat{\beta}(q-1) \right), \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_j \left( \hat{\beta}(q-1) \right) = y_j - \hat{y}_j \left( \hat{\beta}(q-1) \right);$$

$\hat{y}_j (j = \overline{1, m})$  - вихід моделі на  $(q-1)$ -му кроці;  $q$  - номер кроку ітерації;  $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_s)$  - вектор невідомих параметрів;

$$Q_j = \begin{bmatrix} M\{\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(1)\} & \dots & M\{\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(1)\} \\ \dots & \dots & \dots \\ M\{\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(M)\} & \dots & M\{\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(M)\} \end{bmatrix}$$

Попередній вираз - коваріаційна матриця перешкод або груба її оцінка, отримана в припущенні ергодичності випадкового процесу  $\tilde{\varepsilon}(k), k = \overline{1, m}$ , як матриця оцінок кореляційних функцій  $R_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(\tau)$ :

$$Q_j = \begin{bmatrix} \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(0)\hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(1) & \dots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M) \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M)\hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M-1) & \dots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(0) \end{bmatrix},$$

$$\text{де } \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{M-\tau} \sum_{k=1}^{M-\tau} \tilde{\varepsilon}_j(k)\tilde{\varepsilon}_j(k+\tau), & \tau \leq \tau_m, \\ 0, & \tau > \tau_m; \end{cases}$$

$\tau_m$  – зсув, за якого оцінка  $\hat{R}(\tau)$  порівнянна з її похибкою. В найпростішому випадку, якщо  $\tau_m = 1$ , то матриця  $Q$  діагональна.

*Друга компонента критерію (5.43)*

$$\begin{aligned} J_2 &= \left( \hat{\beta}(q) - \beta_a \right)^T P_a^{-1} \left( \hat{\beta}(q) - \beta_a \right) = \\ &= \left( \hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q) - \beta_a \right)^T P_a^{-1} \left( \hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q) - \beta_a \right) = (5.45) \\ &= \left( \Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_a(q-1) \right)^T P_a^{-1} \left( \Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}(q-1) \right), \end{aligned}$$

де  $\Delta\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}(q-1)$ ,  $\Delta\hat{\beta}_a(q-1) = \beta_a - \hat{\beta}(q-1)$ ,

$P_a$  – коваріаційна матриця апіорних значень коефіцієнтів  $\beta_a$ . За відсутності апіорної інформації про  $\beta_a$  значення  $P_a \rightarrow \infty$  і  $J_2 = 0$ ; для відомих границь  $\beta_{ia \max}, \beta_{ia \min}$  компонент вектора  $\beta_a$  матриці  $P_a$  може здаватися діагональною. При цьому елементи  $P_{ia}$  діагоналі  $P_a$ , задаються з точністю до параметру  $\alpha_1$ :

$$P_{ia} = \alpha_1^2 |\beta_{ia \max} - \beta_{ia \min}|^2, \alpha_1 \approx 0,3 \div 1.$$

*Третя компонента критерію (5.43)*

$$J_3 = \left( \Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}_{анос}(q-1) \right)^T P_{анос}^{-1} \left( \Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}_{анос}(q-1) \right), (5.46)$$

де  $\Delta\hat{\beta}_{анос}(q-1) = \hat{\beta}(q-1) - \hat{\beta}_{анос}$ ;  $\hat{\beta}_{анос}$  – апостеріорна оцінка  $\beta$ , отримана з попереднього обчислення, якщо при обробці конкретної вибірки даних враховуються, результати, отримані з інших вибірок;  $P_{анос}$  – коваріаційна матриця апостеріорних оцінок чи, в найпростішому випадку, апроксимація її діагональною матрицею з елементами  $P_{анос} = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{ia \text{пос}}}^2$ , де  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{ia \text{пос}}}^2$  обчислюють як розкид оцінок  $\hat{\beta}_i$ , отриманих для різноманітних вибірок даних.

*Четверта компонента критерію (5.43)*

$$J_4 = \Delta \hat{\beta}^T(q) \lambda^{-1} \Delta \hat{\beta}(q), \quad (5.47)$$

де  $\lambda$  – зазвичай діагональна матриця регуляризуючих коефіцієнтів  $\alpha_2$ . Якщо  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , то матриця  $\|\lambda^{-1}\| \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \hat{\beta}(q) \rightarrow 0$  і, навпаки, якщо  $\alpha_2 \rightarrow 0$  матриця  $\lambda^{-1} \rightarrow 0$  і компоненти  $J_4$  не впливає на значення  $\Delta \hat{\beta}(q)$  на  $q$ -ому кроці релаксійного процесу.

Гradient функції (5.43)

$$\partial J \left( \hat{\beta}(q-1) \right) / \partial \Delta \hat{\beta} = \sum_{p=1}^4 \partial J_p / \partial \Delta \hat{\beta}. \quad (5.48)$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \partial J_1 / \partial \Delta \hat{\beta} &= -2 \sum_{j=1}^m (\partial e_j / \partial (\Delta \hat{\beta})^T)^T Q_j^{-1} e_j = \\ &= -2 \sum_{j=1}^m (\partial \varepsilon_j / \partial \Delta \hat{\beta}) Q_j^{-1} \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\partial J_2 / \partial \Delta \hat{\beta} = 2 P_a^{-1} \left( \Delta \hat{\beta}(q) - \Delta \beta_a(q-1) \right); \quad (5.50)$$

$$\partial J_3 / \partial \Delta \hat{\beta} = 2 P_{anoc}^{-1} \left( \Delta \hat{\beta}(q) - \Delta \beta_{anoc}(q-1) \right); \quad (5.51)$$

$$\partial J_4 / \partial \Delta \hat{\beta} = 2 \lambda^{-1} \left( \Delta \hat{\beta}(q) - 0 \right). \quad (5.52)$$

З умови рівності нулю (5.48), враховуючи (5.44), (5.49) – (5.52) отримаємо систему нормальних рівнянь відносно вектора  $\Delta \hat{\beta}(q)$  невідомих приростів вектора  $\hat{\beta}(q-1)$  на  $q$ -му кроці ітерації:

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \left( \Delta \beta \right)^T} + P_a^{-1} + P_{\hat{a} \hat{i} \hat{n}}^{-1} + \lambda^{-1} \right) \Delta \hat{\beta}(q) = \\
& = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_a^{-1} \Delta \beta_a(q-1) + P_{\hat{a} \hat{i} \hat{n}}^{-1} \Delta \hat{\beta}_{\hat{a} \hat{i} \hat{n}}(q-1).
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Перед тим як розв'язувати систему (5.53), введемо параметр  $\alpha_3$ , який покращить збіжність для неквадратичного функціоналу (5.43):

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \left( \Delta \beta \right)^T} + P_a^{-1} + P_{anoc}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right) \Delta \hat{\beta}(q) = \\
& = \alpha_3 \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_a^{-1} \Delta \beta_a(q-1) + P_{anoc}^{-1} \Delta \hat{\beta}_{anoc}(q-1).
\end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\beta}(q) &= \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \left( \Delta \beta \right)^T} + P_a^{-1} + P_{\hat{a} \hat{i} \hat{n}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} * \\
&* \left( \alpha_3 \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_a^{-1} \cdot \Delta \beta_a(q-1) + P_{\hat{a} \hat{i} \hat{n}}^{-1} \Delta \hat{\beta}_{\hat{a} \hat{i} \hat{n}}(q-1) \right),
\end{aligned} \tag{5.54}$$

тоді

$$\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q-1) + \Delta \hat{\beta}(q), \tag{5.55}$$

де  $\alpha_3 \in [1, \infty)$ .

Алгоритм (5.54), (5.55) узагальнює ряд методів:



-для точно заданих  $Q_j^{-1}$ ,  $P_a^{-1}$ ,  $P_{a\text{пос}}^{-1}$ ,  $\lambda^{-1} = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$  та гауссових щільностей розподілу  $\tilde{\epsilon}$ ,  $\hat{\beta}_a$ ,  $\hat{\beta}_{a\text{пос}}$  він відповідає байєсівському;

-для  $P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$  і точно заданої  $Q_j^{-1}$  – марківському;

-для  $Q_j^{-1} = E$ ,  $P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$  – методу Гаусса-Ньютона;

для  $P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = 0$  – регуляризації Тихонова; для великих  $\lambda^{-1}$  і  $\alpha_3$  – градієнтному, для середніх – методу Маркварда.

Зміщення оцінки (5.55)

$$M\left\{\delta\hat{\beta}(q)\right\} = \lim_{q \rightarrow \infty} \hat{\beta}(q) - \beta \quad (5.56)$$

залежить від того, чи збігається послідовність (5.55) і чи досягнута при  $\hat{\beta}(q) = \beta$  стаціонарна точка  $J^*$ , яка відповідає необхідній умові оптимальності

$$\partial J^* / \partial \Delta \hat{\beta} = 0. \quad (5.57)$$

Вибором параметру  $\alpha_3$  можна гарантувати збіжність по функціоналу  $J(\hat{\beta})$  до стаціонарної точки  $J^*(\hat{\beta})$ , в якій справедлива умова (5.57). Математичне очікування для (5.57) як середнє по множині кінцевих реалізацій для нескінченного числа  $q$  кроків, з врахуванням (5.49) – (5.52), дорівнює:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m M \left\{ \frac{\partial \tilde{\epsilon}_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} e_j \right\} + P_a^{-1} \left( \hat{\beta}(\infty) - \beta_a \right) + \\ + P_{a\text{пос}}^{-1} \left( \hat{\beta}(\infty) - \hat{\beta}_{a\text{пос}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

де згідно (5.44),

$$\begin{aligned}
M \left\{ \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \varepsilon_j \right\} &= M \left\{ \left( - \frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \beta} \right) Q_j^{-1} \left( y_j - \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty)) \right) \right\} = \\
&= -M \left\{ \frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} y_j \right\} + M \left\{ \frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \beta} Q_j^{-1} \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty)) \right\}.
\end{aligned} \quad (5.59)$$

Так як  $\hat{y}_j = \hat{y}_j(\beta(\infty, x + N, t))$ ,  $y_j = f_j(\beta, x^*, t) + \tilde{\varepsilon}_j$ , то для того щоб (5.59) було близьке до нуля, необхідно в моделі замість  $x + N$  мати  $x^*$  або його оцінку  $\hat{x}^*$ , близьку до  $x^*$ .

З (5.58) очевидна й інша причина зміщення, яка полягає в тому,

що для  $\beta_a \neq \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}_{\text{апоc}} \neq \hat{\beta}$ ,  $M < \infty$ ,  $P_a^{-1} > 0$ ,  $P_{\hat{\beta}}^{-1} > 0$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \delta \beta} Q_j^{-1} \varepsilon_j < \infty$

з'являється додаткове зміщення від неточного завдання  $\beta_a$  і  $\hat{\beta}_{\text{апоc}}$ .

Коваріацію оцінки (5.55) може бути визначено наближено. В точці (5.57) дамо невелику варіацію  $\tilde{\varepsilon}$  величини  $\hat{y}$ , яка приведе до варіації  $\partial \hat{\beta}$  оцінки  $\hat{\beta}$ . Тоді умова (5.57) справедлива для  $\hat{\beta}^* + \partial \hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial J \left( \hat{\beta}^* + \delta \beta, y^* + \tilde{\varepsilon} \right)}{\partial \delta \beta} \approx \frac{\partial J \left( \hat{\beta}^*, y^* \right)}{\partial \delta \beta} + \\
&\quad \frac{\partial^2 J \left( \hat{\beta}^*, y^* \right)}{\partial \delta \beta \partial \left( \delta \hat{\beta} \right)^T} \delta \beta + \dots + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J \left( \hat{\beta}^*, y^* \right)}{\partial \delta \beta \partial \left( \varepsilon_j \right)^T} \tilde{\varepsilon}_j,
\end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\text{де } \frac{\partial J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \hat{\beta}} = 0, \quad \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \hat{\beta} \partial (\hat{\delta\beta})^T} = \left[ \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \hat{\beta}_i \partial \hat{\beta}_j} \right]_{i,j=1}^n ;$$

$$\frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \hat{\beta} \partial (\tilde{\varepsilon}_j)^T} = \left[ \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \hat{\beta}_i \partial \tilde{\varepsilon}_j(k)} \right]_{\substack{i=1, \bar{n} \\ k=1, M}} ; \quad \tilde{\varepsilon}_j^T = (\tilde{\varepsilon}_j(1), \dots, \tilde{\varepsilon}_j(M)).$$

Із умови (5.60) визначимо

$$\hat{\delta\beta} = - \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\hat{\delta\beta})^T} \right)^{-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\varepsilon_j)^T} \tilde{\varepsilon}_j, \quad (5.61)$$

де, згідно (5.43) – (5.54),

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\hat{\delta\beta})^T} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \hat{\delta\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\hat{\delta\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{a\bar{i}\bar{n}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1}; \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \cdot \partial (\tilde{\varepsilon}_j)^T} = \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \hat{\delta\beta}} Q_j^{-1}, \quad l=1, \bar{m}. \quad (5.63)$$

Вважаючи, що вираз (5.62), (5.63) є детермінованими і вважаючи відсутність кореляції між  $\tilde{\varepsilon}_j$  і  $\tilde{\varepsilon}_i \left( i \neq j; i, j=1, \bar{m} \right)$ , одержуємо коваріацію оцінки (5.61):

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\delta\beta}] &= M\{\hat{\delta\beta}(\hat{\delta\beta})^T\} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\hat{\delta\beta})^T} \right)^{-1} \left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\tilde{\varepsilon}_j)^T} \right) Q_j \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\tilde{\varepsilon}_j)^T} \right)^T \right] \times \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \hat{\delta\beta} \partial (\hat{\delta\beta})^T} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

де  $Q_j^*$  - коваріаційна матриця похибки  $\tilde{\epsilon}_j(k)$ . Підставивши (5.62), (5.63) в (5.64), знайдемо

$$\begin{aligned} cov[\hat{\delta\beta}] = & \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \hat{\delta\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\hat{\delta\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{a\hat{i}\hat{n}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} \times \\ & \times \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \hat{\delta\beta}} Q_j^{-1} Q_j^* Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\hat{\delta\beta})^T} \right) \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \hat{\delta\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\hat{\delta\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{a\hat{i}\hat{n}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Вираз (5.65) залежність від значень  $Q_j^*, Q_j$ , визначає коваріацію байєсівських оцінок ( $\lambda^{-1} = 0, Q_j = Q_j^*$ ), марківських ( $P_a^{-1} = P_{a\hat{i}\hat{n}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0, Q_j = Q_j^*$ ), Гауса-Ньютона ( $Q_j = I, P_a^{-1} = P_{a\hat{i}\hat{n}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$ ), Тихонова ( $P_a^{-1} = P_{a\hat{i}\hat{n}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0, \alpha_3 \rightarrow 0$ ), градієнтних ( $\lambda^{-1} \rightarrow \infty, \alpha_3 \rightarrow 0$ ).

Збіжність оцінок узагальненого алгоритму (5.54), (5.55) залежить від апіорних і апостеріорних оцінок  $\beta_a$  і  $\hat{\beta}_{a\text{ос}}$ , від регулюючого додатку  $\beta_3 \lambda^{-1}$ , від матриць  $Q_j$  і особливо від виду функції  $J_I$  (5.44). Для строго випуклої квадратичної по  $\beta$  поверхні  $J$  оцінка  $\hat{\beta}$  сходиться (при  $\alpha_3 = 0$ ) до оптимальної точки за один крок, так як вираз (5.45) точний. В решті випадків збіжність може бути покращена за рахунок покращення числа обумовленості матриць.

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \hat{\delta\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\hat{\delta\beta})^T} \quad (5.66)$$

і адаптації параметра  $\beta_3$ . Покращення обумовленості досягається плануванням експерименту, який ортогоналізує компоненти  $\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta\beta_j}, i = \overline{1, n}$ , або (для достатньо інформативних вибірок) таким

спеціальним «зважуванням» даних, яке частково ортогоналізує компоненти  $\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \beta_j}$ , наприклад, введенням в (5.66) порядково в кожен рядок вагових функцій

$$\eta_{ij}(k) = n \left| \frac{\partial \hat{y}_j(k)}{\partial \delta \beta_i} \right|^{\alpha_4} / \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \hat{y}_j(k)}{\partial \delta \beta_i} \right|^{\alpha_4}, \eta_{ij} \in [0,1],$$

які для  $b_4=0$  не вносять змін, при  $\alpha_4 > 0$  виділяють ті точки  $k$ , в яких амплітуда діагонального елемента  $i$ -го рядка (при оцінці  $\beta_i$ ) більша амплітуди решти компонентів. Для великих  $\alpha_4$  різко зростає вага ортогональних векторів, для яких значення  $\eta_{ij}(k)$  прямує до одиниці. Це призводить до ортогоналізації (5.66), що збільшує обумовленість і зменшує коваріацію оцінок  $\hat{\beta}$ . В той самий час «збіднення» вибірки за рахунок нерівномірного зважування повинно привести до збільшення коваріації  $\hat{\beta}$ . Для обмежених вибірок оптимальне  $\hat{\sigma}_4^*$  може бути нульовим, з ростом числа  $M$  (довжина вибірки)  $\hat{\sigma}_4^*$  зміщується в сторону більших значень. Параметр  $b_3$  для неквадратичних унімодальних поверхонь підбирають з умови забезпечення строго релаксаційного процесу  $\hat{\beta}(q)$ , задовольняючого вимозі сходження по  $J$ . Задаючи матриці  $Q_j$ ,  $L$  і параметри  $b_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , з універсального методу можна отримати його оптимальну для конкретних умов різновидність.

Проілюструємо вплив не ортогональності компонента градієнта показника  $J$  і неточності завдання функції  $J(\Delta \epsilon)$  на якість оцінок  $\hat{v}$ .

Припустимо, що оцінюється двомірний вектор  $\hat{v}$  в рівнянні  $y = \beta^T x$  за двома компонентами  $J_1$  і  $J_2$  квадратичного по  $\Delta \epsilon$  показника (5.43) (рис.5.1,5.2). На рис.5.1 побудовані лінії рівного рівняння  $J_1$  і  $J_2$  для двох різних апріорних значень  $\beta'_a, \beta''_a$  і ваг  $P_a^{-1}$  ( $J'_2$  має більшу вагу, ніж  $J''_2$ ). Змінні  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  ортогональні (осі еліпса  $J_1$  співпадають з осями  $(\beta_i - \beta_i^*), i = 1,2$ ). Так як вихідна інформація зашумлена, то функціонали  $J_1$ , вичислюють з точністю до величини  $\delta J_1$ . Лінії рівня  $\delta J_1$  визначають область невизначеності (заштрихована область), яка вміщує коваріації

оцінок  $\text{cov}[\epsilon]$ . Область невизначеності одного  $J_1$  більша, ніж для  $J_1 + J_2$ , при чому

$$\text{cov}[\hat{\beta}'] < \text{cov}[\hat{\beta}'] < \text{cov}[\hat{\beta}],$$

де  $\text{cov}[\hat{\beta}]$ ,  $\text{cov}[\hat{\beta}']$ ,  $\text{cov}[\hat{\beta}']$  - коваріації оцінок, отриманих з умов мінімуму  $J_1$ ,  $J_1 + J_2'$ ,  $J_1 + J_2''$  відповідно.

Зміщення оцінок розподілені у зворотному порядку

$$\delta\hat{\beta}'' > \delta\hat{\beta}' > \delta\hat{\beta} = 0.$$

Чим більша вага  $P_a^{-1}$  регуляризуючої добавки ( для неточного  $v_a$ ), тим більше зміщення. Як видно, для ортогональних  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  оцінки  $\hat{\beta}'$  і  $\hat{\beta}''$ , які одержано по вибірці довжини  $M$ , все ж ближчі до істинної  $\beta^*$ .

Пунктиром показано, що якщо  $M \rightarrow \infty$ , то області невизначеності стягуються в точку, а оцінки  $\hat{\beta}'_\infty$  і  $\hat{\beta}''_\infty$  прямують до істинного  $\beta^*$ .

Для кінцевих  $M$  оцінки  $\hat{\beta}'$  і  $\hat{\beta}''$  будуть гіршими, ніж оцінка  $\hat{\beta}$ , отримана тільки по показнику  $J_1$ , якщо точка  $v_a$  не належить області невизначеності.

На рис. 5.1, б подано перетин показників по траєкторії руху  $\beta_a'' \rightarrow \beta^* \rightarrow \beta_a'$ . На рис.5.2, а видно, що збільшення ваги  $J_2'$  в порівнянні з  $J_2''$  приводить до росту зміщення і зменшенню коваріаційних оцінок. Це випадок, коли  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  не ортогональні, але лінійно незалежні. Еліпс показника  $J_1$  повернутий відносно осей  $\beta_i - \beta_i^*$ . Довжина головної діагоналі залежить від взаємозв'язку  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$ . На відміну від попередніх рисунків, тут для остаточного значення  $M$  уточнюються тільки компоненти  $\hat{\beta}_2$  вектора  $\hat{\beta}$ , а оцінка  $\hat{\beta}_1$  погіршується (її зміщення стає більшим апіорного).

На рис.9.2, б наведено випадок, для якого  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  лінійно залежні. На відміну від попереднього, тут навіть у асимптотиці (при  $M \rightarrow \infty$ ) оцінки  $\hat{\beta}'_\infty$  і  $\hat{\beta}''_\infty$  не співпадають з  $\beta^*$ . Нарешті, якщо залежність  $y(\beta)$  нелінійна (функція Розенброка), то можлива ситуація (рис.9.3), за якої обидві оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  через невірну

апріорну інформацію про  $\beta_a$  і не випуклості функціоналу  $J(\beta)$  уточнююватися не будуть.

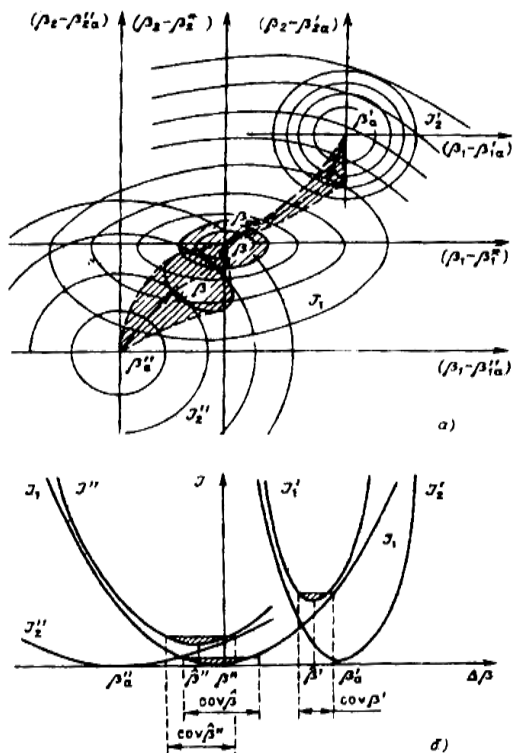


Рис. 5.1. Поверхні строго випуклих функціоналів  $Y_1, Y_2$  і траєкторії настройки  $\hat{\beta}(t)$ , коли компоненти  $\partial Y_1 / \partial \hat{\beta}$  і  $\partial Y_2 / \partial \hat{\beta}$ , ортогональні (а) і перетин (б) цих функціоналів по траєкторії  $\hat{\beta}(t)$

В таких випадках доцільно збільшити компонента  $\lambda^{-1}$  алгоритму (9.54), (9.55), спростивши його до градієнтного. Правильність завдання апріорних і апостеріорних даних  $(\beta_a, P_a, P_{a\hat{i}\hat{n}}, \beta_{a\hat{i}\hat{n}})$  можна перевірити, зіставивши незміщені оцінки, отримані при  $P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$ , і їх коваріацію з оцінками для заданих  $P_a, P_{a\text{пос}}, \lambda, \beta_a, \hat{\beta}_{a\text{пос}}$ .

Якщо скористатися поняттям довірчих областей і взяти їх подібними областями невизначеності

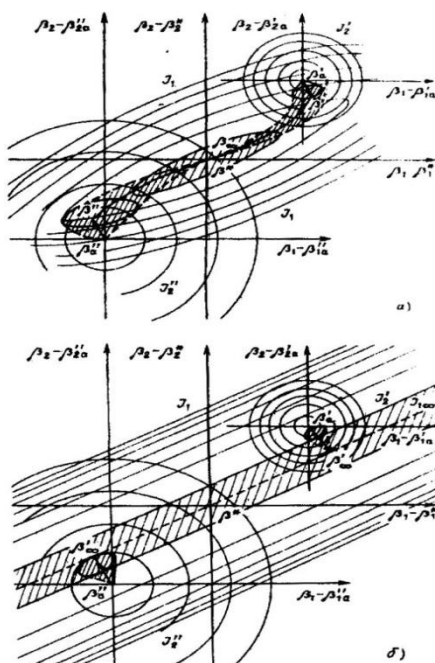


Рис. 5.5. Поверхні функціоналів  $J_1, J_2$  і траєкторії настрійки  $\hat{\beta}(t)$ , коли компоненти  $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_1$  і  $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_2$ : а – ортогональні; б – лінійно залежні



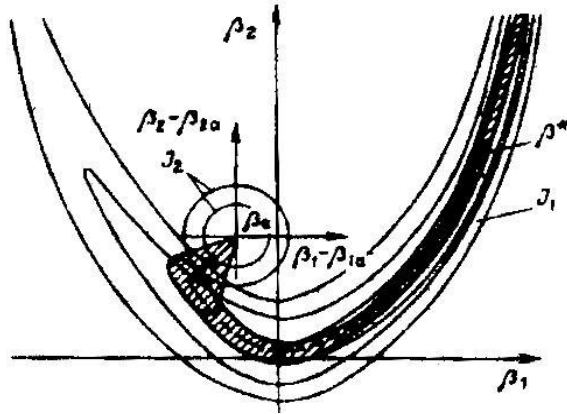


Рис5.3. Поверхня невиключного ( $J_1$  – функція Розенброка) і виключного ( $J_2$ ) функціоналів. Траєкторія настройки  $\hat{\beta}(t)$

$$(\hat{\beta} - \hat{\beta}_\infty)(\text{cov} \hat{\beta})^{-1}(\hat{\beta} - \hat{\beta}_\infty) \leq \delta J, \quad (5.67)$$

то в припущенні нормальності розподілення оцінки  $\hat{\beta}$  з коваріацією  $\text{cov} \hat{\beta}$  і для заданої довірчої вірогідності  $\gamma$  значення  $\delta J$  визначається як верхній  $\gamma$ -квантиль розподілу  $\chi^2$ . Задавшись  $\gamma$ , а отже, і значенням  $\delta J$  і переходячи в (5.67) від нерівності до рівності, отримаємо поверхню спільної довірчої області (еліпсоїда). Побудуємо ці поверхні для незміщених оцінок  $\hat{\beta}(J_1)$  і  $\hat{\beta}(J_1, J_2)$  з врахуванням  $P_a$ ,  $P_{\text{апос}}$ . Якщо область (5.67) значень оцінок  $\hat{\beta}(J_1)$  включає в себе область (9.67) для  $\hat{\beta}(J_1, J_2)$ , то виходять оцінки, які не поступаються оцінкам  $\hat{\beta}(J_1)$ , в інакшому випадку апіорна і апостеріорна інформації задані невірно і з вірогідністю  $\gamma$  кращою виявляється оцінка  $\hat{\beta}(J_1)$ . Показником оптимальності вектора  $\alpha$  параметрів алгоритму може бути об'єм області (5.67), рівний

$$v(\delta J) = (\delta J \pi)^{n/2} \det^{1/2}(\text{cov}[\hat{\beta}]) / \Gamma(n/2 + 1),$$

(де  $\Gamma$  – гама-функція), або  $D$ -критерій, рівний  $\det(\text{cov}[\hat{\beta}])$ .

#### 5.4. Оптимізація параметрів алгоритму ідентифікації з умови мінімуму середніх втрат при керуванні динамічним об'єктом (канал крену ракети)

На етапі проектування адаптивних систем керування, наприклад літальних апаратів, за допомогою імітаційного моделювання визначають показник  $I(x, u)$  якості керування моделлю  $\Sigma$ , оптимальну стратегію  $u^*(t)$  управління і відповідні їй значення  $I^*(x^*, u^*)$  і траєкторію  $x^*(t)$ . Сформуємо функцію втрат (5.5) для байєсовського методу ідентифікації у вигляді варіації  $\delta I^*$ , викликаній неточністю  $\delta \hat{\beta}$  оцінки  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta^*$  параметрів імітаційної моделі  $\Sigma$ :

$$\delta I^* \approx \delta \hat{\beta}^T \left( \frac{\partial^2 I^*}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \right) \delta \hat{\beta}. \quad (5.68)$$

Елементи матриці  $\partial^2 I^* / (\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T)$  визначимо аналітично або методами планування експерименту на імітаційній моделі  $\Sigma$ . Умовні втрати при виборі оцінки  $\hat{\beta}$  визначимо як математичне очікування функції втрат  $\delta I^*$  по вимірам  $x$ :

$$\int_x \delta I^*(\hat{\beta}, \beta^*) p(x/\beta^*) dx, \quad (5.69)$$

де  $\int_x (\cdot) dx$  –  $n$ -кратний інтеграл по всім компонентам  $x_i$  вектор-функції  $x$ ;  $p(x/\beta^*)$  – щільність вірогідності значень вимірювань  $x$ , залежна від вектора  $\beta^*$ .

*Середні втрати* – це математичне очікування умовних втрат (5.69) по всій області визначення  $\beta^*$ :

$$R(\hat{\beta}) = \int_{\beta^*} \int_x \delta I^*(\hat{\beta}, \beta^*) p(x/\beta^*) p(\beta^*) dx d\beta^*, \quad (5.70)$$

де  $p(\beta^*)$  – щільність розподілу параметрів  $\beta^*$ .

Із тотожності Байєса

$$p(x/\beta^*) p(\beta^*) = p(\beta^*/x) p(x)$$

випливає, що

$$R(\hat{\beta}) = \int_x p(x) dx \int_{\beta^*} \delta I^* \left( \hat{\beta}, \beta^* \right) p(\beta^* / x) d\beta^*, \quad (5.71)$$

$$\text{де } p(x) = \int_{\beta^*} p(x, \beta^*) d\beta^*.$$

Оптимальний метод і оцінку  $\hat{\beta}$  можна отримати з умови

$$\frac{\partial}{\partial \beta^*} \int \delta I^* \left( \hat{\beta}, \beta^* \right) p(\beta^* / x) d\beta^* = 0. \quad (5.72)$$

$$\text{де } p(\beta^* / x) = p(x / \beta^*) p(\beta^*) / p(x),$$

або, враховуючи (5.68)

$$\int_{\beta^*} \frac{\partial^2 I}{\partial \beta \partial \beta} \hat{\beta} p(\beta^* / x) d\beta^* = 0.$$

Звідси, так як  $\delta \hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta^*$ , отримаємо оптимальну за критерієм мінімуму середнього ризику (5.71) оцінку

$$\hat{\beta} = \left[ \int_{\beta^*} \frac{\partial^2 I^*}{\partial \beta \partial \beta} p(\beta^* / x) d\beta^* \right]^{-1} \left[ \int_{\beta^*} \frac{\partial^2 I^*}{\partial \beta \partial \beta} \beta^* p(\beta^* / x) d\beta^* \right]. \quad (5.73)$$

Умовні (5.69) або середні (5.70) втрати з функцією втрат (5.68), яка узгоджує критерії керування та ідентифікації, використовуємо як основний функціонал для оптимізації вектора  $\alpha$  параметрів методу ідентифікації  $\text{Opt}_{ak}$ .

Оптимальний по критерію  $R(\hat{\beta}(\alpha))$  вектора  $\alpha^*$  визначаємо з умови

$$\alpha^* = \text{argmin} R(\hat{\beta}(\alpha)) \quad (5.74)$$

**Приклад 5.1.** Об'єкт першого порядку (канал крену ракети).

$$dx / dt = \beta_1^* x(t) + \beta_2^* u(t). \quad (5.75)$$

Початкову умову  $x(0)$  розподілено за нормальним законом з параметрами  $M\{x(0)\} = 0$ ,  $M\{x^2(0)\} = P_0$ ,  $\beta_1^* < 0$ ,  $\beta_2^* > 0$ .

Показник якості керування задано у вигляді

$$I_{qk} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Cx^2(t) + Du^2(t)) dt. \quad (5.76)$$

Підставимо оптимальне керування  $u(t) = kx(t)$ ,  $k < 0$  в (5.75) і знайдемо екстремаль показника (5.76):

$$x(t) = x(0)e^{(\beta_1^* - \beta_2^* k)t}. \quad (5.77)$$

Підставляючи (5.77) в (5.76) і переходячи до середнього по  $x(0)$  значенню  $I_{qk}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} I_{qk} &= 0,5(C + Dk^2)P_0 \int_0^{\infty} e^{2(\beta_1^* - \beta_2^* k)t} dt = \\ &= (C + Dk^2P_0) / 4(\beta_1^* - \beta_1^* k)]^{-1} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Оптимальне значення  $k^*$  коефіцієнта  $k$  в (9.76) визначається із умови

$$\begin{aligned} \partial I / \partial k &= 2Dk^*P_0 \left[ 4(\beta_1^* - \beta_2^* k^*) \right]^{-1} + \\ &+ (C + Dk^{*2})P_0\beta_2^* / 4(\beta_1^* - \beta_2^* k^*)^2 = 0, \end{aligned}$$

або

$$k^{*2} - \frac{2\beta_1^* k^*}{\beta_2^*} - \frac{C}{D} = 0.$$

Звідси оптимальне, яке задовольняє умову стійкості, значення

$$k^* = \beta_1^* / \beta_2^* - \sqrt{(\beta_1^* / \beta_2^*)^2 + C / D}. \quad (5.79)$$

Так як  $u(t)$  і  $x(t)$  в (5.75), згідно з припущенням, зв'язані лінійно, то по  $x(t)$  можна однозначно оцінити лише один коефіцієнт

$$\gamma = \beta_1^* - \beta_2^* k \quad (\gamma < 0). \quad (5.80)$$

Для оцінки  $\gamma$  скористаємося методом найменших квадратів з адаптивною фільтрацією зміщенням (див. роз.6). Показник якості ідентифікації

$$J = \sum_{i=1}^M (y(i) - \gamma x(i)) * \left[ (y(i + \alpha) + y(i - \alpha)) - \gamma (x(i + \alpha) + x(i - \alpha)) \right], \quad (5.81)$$

де  $i$  - позначення дискретних моментів часу  $i\Delta t$ ;  $y(i) = \frac{dx}{dt} = \gamma x(i)$ ;  $\alpha$  - параметр алгоритму.

З умови мінімуму (5.81) отримаємо оцінку  $\hat{\gamma}$  параметра  $\gamma$ :

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=\alpha}^{M-\alpha} [x(i)(y(i-\alpha) + y(i+\alpha)) + y(i)(x(i+\alpha) + x(i-\alpha))]}{\left[ 2 \sum_{i=\alpha}^{M-\alpha} x(i)(x(i+\alpha) + x(i-\alpha)) \right]}. \quad (5.82)$$

Нехай динамічний об'єкт (5.75) такий, що  $y(i)$  вимірюється точно ( $y(i) = \gamma x^*(i)$ ), а  $x(i)$  вимірюється з перешкодою  $N(i)$ :

$$x(i) = x^*(i) + N(i).$$

Така ситуація можлива, наприклад, під час керування каналом крену ракети, кут крену якої вимірюється менш точно, ніж кутова швидкість.

Переходячи в (5.82) до оцінок  $\hat{R}(\alpha)$  кореляційних функцій і припускаючи їх симетричними по  $\alpha$ , знайдемо оцінку

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{R}_{x^*x^*}(\alpha) + \hat{R}_{Nx^*}(\alpha)}{\hat{R}_{x^*x^*}(\alpha) + 2\hat{R}_{Nx^*}(\alpha) + \hat{R}_{NN}(\alpha)} \gamma$$

або

$$\hat{\gamma} = \left[ 1 - \frac{\hat{R}_{N^*x^*}(\alpha) + \hat{R}_{NN^*}(\alpha)}{\hat{R}_{x^*x^*}(\alpha) + 2\hat{R}_{Nx^*}(\alpha) + \hat{R}_{NN}(\alpha)} \right] \gamma. \quad (5.83)$$

Зміщення оцінки (5.83)

$$\delta\hat{\gamma} = \frac{\hat{R}_{NN}(\alpha)\gamma}{\left[ \hat{R}_{x^*x^*}(\alpha) + \hat{R}_{NN}(\alpha) \right]}. \quad (5.84)$$

Дисперсію  $\sigma_{\gamma}^2$  оцінки (5.83) отримаємо наближено, припускаючи, що дисперсія оцінок  $\hat{R}_{Nx^*}(\alpha)$  набагато менше дисперсії оцінок  $\hat{R}_{NN}$  і нехтуючи членами другого і більших порядків, знайдемо

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma}^2 &\approx \mathbf{M} \left\{ \left( -\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \Delta \hat{R}_{NN}} \right) \Delta \hat{R}_{NN} \right\}^2 \approx \\ &\approx \left( \frac{\hat{R}_{x^*x^*}(\alpha) \sigma_{\hat{R}_{NN}}(\alpha)}{(M-2\alpha) \left[ \hat{R}_{x^*x^*}(\alpha) + \hat{R}_{NN}(\alpha) \right]^2} \right)^2 \gamma^2, \end{aligned} \quad (5.85)$$

Так як в припущенні некорельованості перешкод  $N(i)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{ \Delta \hat{R}_{NN} \}^2 &= \sigma_{R_{NN}}^2 / (M-2\alpha), \\ \sigma_{R_{NN}}^2 &= \left( \sigma_{R_{NN}}^2 / M \right) \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{M-2\alpha-1} (1-i/M) \right] e^{-i|\alpha|}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Якщо кореляційна функція перешкод експоненціальна

$$R_{NN}(\alpha) = (M-2\alpha) \sigma_{R_{NN}}^2 e^{-r|\alpha|}, \quad (5.87)$$

а з урахуванням (5.77) і (5.80) (нагадаємо,  $\gamma < 0$ )

$$\begin{aligned} R_{xx}(\alpha) &= \lim_{M \rightarrow \infty} P_0 \sum_{i=\alpha}^{M-\alpha} e^{(2i+\alpha)\gamma} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} P_0 e^{3\alpha\gamma} \frac{e^{(M-2\alpha-1)2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} - 1} = \frac{P_0}{1 - e^{2\gamma}} e^{3\alpha\gamma} = \bar{P}_0 e^{3\alpha\gamma}, \end{aligned} \quad (5.88)$$

де  $P_0 = P_0(1 - e^{2\gamma})$ , то, підставив (5.87), (5.88), (5.85) та (5.84) і позначивши  $3\alpha\gamma + r|\alpha| = s(\alpha)$ , знайдемо

$$\delta\hat{\gamma} = \gamma / [1 + \bar{P}_0 e^{s(\alpha)} / (M - 2\alpha)\sigma_N^2]; \quad (5.89)$$

$$\sigma_\gamma = \frac{R_{NN}^{(\alpha)}}{M^{-2\alpha}} \cdot \frac{|\gamma|}{1 + (M - 2\alpha)e^{-s(\alpha)}\sigma_N^2 / \bar{P}_0}. \quad (5.90)$$

Нехай в (5.90)  $\beta_2^*$  відомо і оцінюється лише  $\beta_1^*$ , тоді  $\delta\hat{\gamma} = \delta\hat{\beta}_1$ ,  $\sigma_{\hat{\gamma}} = \sigma_{\hat{\beta}_1}$ , де  $\hat{\beta}_1$  розподілено по нормальному закону:

$$p(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sigma_{\hat{\beta}_1} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\hat{\beta}_1 - (\beta_1^* + \delta\hat{\beta}_1)}{2\sigma_{\hat{\beta}_1}^2}\right]. \quad (5.91)$$

Через невідповідність  $\hat{\beta}_1$  точному значенню  $\beta_1^*$  середні втрати дорівнюють

$$M\{I^*(\hat{\beta}_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} I^*(\hat{\beta}_1) p(\hat{\beta}_1) d(\hat{\beta}_1), \quad (5.99)$$

де вибір  $I^*(\hat{\beta}_1)$  неоптимальний через неточне подання коефіцієнта  $k$  в (5.76) по величині  $\hat{\beta}_1$ :

$$I^*(\hat{\beta}_1) = (C + Dk^2 P_0) / 4(\hat{\beta}_1 - \beta_2^* k) \quad (5.93)$$

$$k = \hat{\beta}_1 / \beta_2^* - \sqrt{(\hat{\beta}_1 / \beta_2^*)^2 + C / D}. \quad (5.94)$$

Підставивши (5.93), (5.94), (5.83), (5.91) в (5.92) і задавши конкретні значення параметрів. Знайдемо залежність  $M\{I^*(\hat{\beta}_1(\alpha))\} = M\{I^*(\alpha)\}$ , з якої, відповідно до (5.74), визначається оптимальне по (5.92) значення  $\alpha^*$  методу ідентифікації (5.82).

Для  $\beta_1^* = 0.01, \beta_2^* = 0.01, C = D = P_0 = \sigma_N = 1, r = 0.4$  на рис.5.4а наведена залежність (в області екстремуму  $I^*(\alpha)$ ) середніх втрат (5.92) від  $\alpha$  для різноманітних  $M$ , з якої отримана екстремаль

$\alpha^*(M)$  (рис 5.4,б). На рис. 5.4,в наведено сімейство екстремалей  $\alpha^*$ , як функцій відношення  $r/\gamma$  та числа  $M$  при тих же параметрах. При  $r=\gamma$  параметр  $\alpha^*$  дорівнює нулю, так як спектри сигналів  $x^*(t)$  та  $N(t)$  співпадають, при  $r > \gamma$  величина  $\alpha^*$  різко збільшується (компенсація зміщення 5.84,б) при  $r < \gamma$  — убуває, так як зміщення (5.84) близько до нуля та при малих  $\alpha$ , а дисперсія  $\alpha_{\hat{\gamma}}^2$  зі зростанням  $\alpha$  зростає. Відношення між зміщеннями  $\delta\hat{\gamma}$  та дисперсією  $\alpha_{\hat{\gamma}}^2$  добре видно з рис.5.5, де для  $C=D=\sigma_N=10$ ,  $r=0,4, M=70$  побудовані щільності розподілення оцінок  $\hat{\beta}_1$  (5.91): зі зростанням  $\alpha$  зміщення  $\hat{\beta}_1$  прямує до нуля, а дисперсія  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$  зростає.

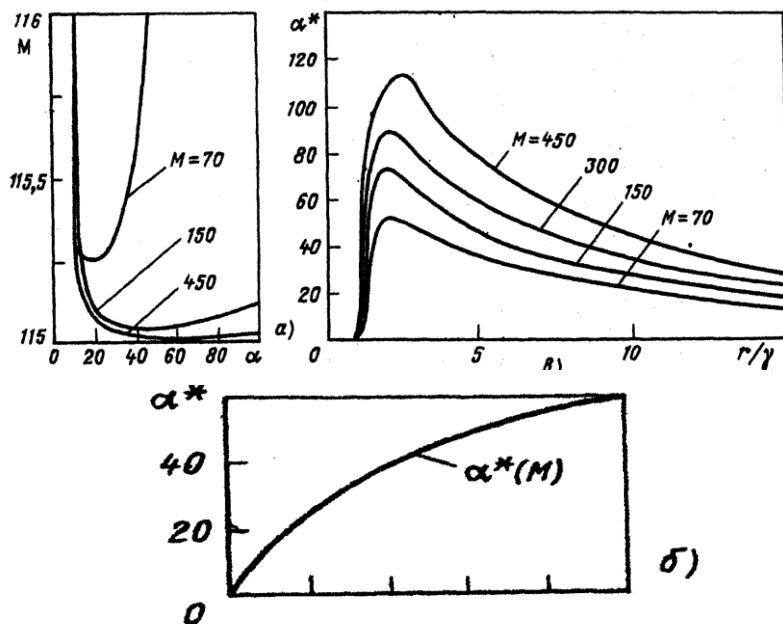




Рис.5.4 Залежність середніх втрат від числа точок  $M$  та параметру здвигу  $\alpha$  (а), екстремального значення  $\alpha^*$  як функція від довжини вибірки (б) та сімейства екстремалей параметру  $\alpha^*$  як функцій від довжини вибірки  $M$  і співвідношення показників експонент кореляційних функцій сигналу та перешкоди (в)

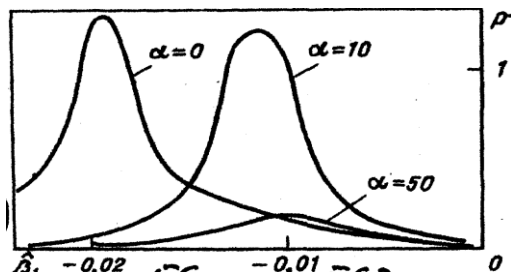


Рис.5.5 Залежність щільності нормального розподілу оцінки  $\hat{\beta}_1$  від параметру здвигу  $\alpha$

*Контрольні запитання:*

- 1) Надати класифікацію статистичних операторів оптимальності.
- 2) Навести класифікацію методів оцінювання коефіцієнтів лінійних моделей.
- 3) Навести алгоритм нелінійного оцінювання операторів.
- 4) Навести алгоритм Балівського оцінювання.
- 5) Навести алгоритм Манівського оцінювання.
- 6) Навести алгоритм градієнтного оцінювання.
- 7) Навести алгоритм оцінювання за методом Макварда.
- 8) Навести алгоритм ідентифікації за умовами мінімуму середніх витрат.

*Література до розділу*

1. Ейкхофф П. Основы идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.
2. Гротт Н. Оптимальні статистичні рішення. М.: Мир, 1974

3. Поляк Б.Т.,Цыпкин Я.З. Помехоустойчиваяидентификация //Идентификация и оценкапараметровсистемы // Труды IV Симпозиума ИФАК, препринты ИПУ.М.1976.4.1.с.190-213.
4. Спиди К.,Браун Р., Гудвин Дж. Теорияуправления. М.:Мир,1980.
5. Себер Дж Линейныйрегрессионныйанализ.М.:Мир,1980.
6. Кринецкий Е.И. Летныеиспытания систем управленияракет.М.: Машиностроение,1980.
7. Лінич Л. Ідентифікація систем. : Пер. С англ./Під ред. Я.З. Ципкіна. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
8. 8. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизацияавтоматических систем. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 200 с.
9. Круг Г.К., Сосулин Ю.А., Фатуев В.А. Планированиеэксперимента в идентификации и экстраполяции.М.:Наука 1977.
10. Шеффе Г. Дисперсионныйаналіз.М.:Наука,1980.
11. Бард Й. Нелинейноеоцениваниепараметров. М.: Статистика,1979.
12. Зельнер А. Баесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1980.
13. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Идентиикация систем управления. М.: Наука,1974.

## Розділ 6. Оцінювання параметрів лінійних моделей за неточними вхідними і вихідними сигналами об'єкта

### 6.1. МНК в ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів

В розділі 1.1 було показано, що за відповідних умов точна нелінійна, нестационарна модель (1.1) може бути представлена наближено лінійною стаціонарно моделлю (1.2) виду  $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$ , кожен  $i$ -й рядок якої

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k(t)$$

можна подати як рівняння регресії (4.5), де  $y(t) = \dot{x}_i(t)$ , а множина функцій  $\{x_j(t), U_k(t)\}$  утворюють вектор-функцію  $X(t)$  відповідних регресорів  $\{a_{ij}, b_{ik}\}$  - вектор  $\beta$  параметрів.

Реально маємо ситуацію (5.28), за якої всі змінні вимірюються з випадковими похибками.

В розділі 5 було показано, що наявність випадкових збурень у вимірах незалежних змінних  $X$  призводить до зміщення оцінок  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta$  параметрів моделі  $Y = X\beta$ , якщо вони визначаються методом найменших квадратів. Ця ситуація не відповідає умові 4 (розділ 4.2) Гаусса-Маркова. Лише за наявності апріорної інформації про дисперсії  $\sigma_i^2$  «білих» шумів в вимірах  $X_i(k)$ , ( $i = \overline{1, M}$ ,  $M \gg n$ ), ситуацію можна дещо виправити, якщо від діагональних елементів  $a_{ii}$  матриці  $X^T X$  відняти присутню в них складову  $M \cdot \sigma_i^2$ . Тоді в асимптотиці ( $M \rightarrow \infty$ ) - математичне очікування (9.34) оцінки  $\hat{\beta}$  буде незміщеним:  $M(\hat{\beta}) = \beta$ , бо складова  $\text{diag} \sigma_i^2 \cdot M$  буде скомпенсована складовою  $-M \sigma_i^2$ .

У випадку, якщо апріорі відомо, що  $X_i^*(t_k)$  гладкі низкочастотні функції, а шуми  $N_i(t_k)$  вимірів  $X_i(t_k)$  високочастотні, оцінку  $\hat{\sigma}_i^2$  дисперсії  $\sigma_i^2$  шуму в вимірах  $X_i(t_k)$  можна отримати шляхом низькочастотної фільтрації сигналів

$X_i(t_k)$  – формування моделі шуму  $\hat{N}_i(t)$ , як різниці  $X_i(t_k)$  і  $\hat{X}_i(t_k)$ , де  $\hat{X}_i(t_k)$  – відфільтроване значення. Тоді

$$\hat{N}_i(t_k) = X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k), \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k))^2$$

Скоректувавши діагональні елементи інформаційної матриці  $X^T X$  на ці дисперсії, отримаємо незміщені МНК-оцінки  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta$ .

Практична постановка задачі часто містить в собі суттєву долю невизначеності статистичних властивостей поміх у вимірах вхідних  $X$  і вихідних  $Y$  даних про об'єкт, модель якого може бути представлено як регресійну:

$$Y^* = X^* \beta^* + \varepsilon^* \quad (6.1)$$

де  $Y^*$ ,  $X^* \cdot \beta^*$ ,  $\varepsilon^*$  – точні значення змінних виходу, входу і нев'язки, яка утворюється за умови, що оцінку  $\beta^*$  для точних значень отримано за методом найменших квадратів:

$$\beta^* = (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} \cdot Y^* = C^* Y^*, (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} = C^*, \quad (6.2)$$

тобто, за умови:

$$\beta^* = \operatorname{argmin}_{\beta} \varepsilon^{*T} \cdot \varepsilon^*. \quad (6.3)$$

На практиці МНК-оцінку (6.2) отримують по збуреним завадам  $N_x, N_y$  даним:

$$X = X^* + N_x, Y = Y^* + N_y \quad (6.4)$$

$$\text{де } \tilde{O} = \begin{bmatrix} x_1(1) x_2(1) \dots x_i(1) \dots x_n(1) \\ x_1(2) x_2(1) \dots x_i(2) \dots x_n(2) \\ \text{-----} \\ x_1(m) x_2(m) \dots x_i(m) \dots x_n(m) \end{bmatrix}.$$

$$Y^T = [y(1) y(2) \dots y(M)], \quad x_i(j) = x_i^*(j) + N_{xi}(j), \quad y_i(j) = y_i^*(j) + N_y(j), \quad j = \overline{1, M}.$$

МНК-оцінка (6.2)  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta^*$  знаходиться з умови (6.3), але вже для реальних даних (10.4) у звичайній

$$\hat{\beta} = (\tilde{O}^T \tilde{O})^{-1} \tilde{O}^T Y = C \cdot Y, C = (X^T X)^{-1} X^T, \quad (6.5)$$

або у рекурентній :

$$\hat{\beta}(j+1) = \hat{\beta}(j) + P(j+1)X(j)[Y(j) - X^T(j) \cdot \hat{\beta}(j)],$$

$$P(j+1) = P(j) - P(j)X(j)[\tilde{\sigma}^T(j)\tilde{\sigma}(j)\tilde{O}(j)+1]^{-1} \cdot X^T(j)P(j), \quad (6.6)$$

формах з початковими умовами  $P(0)$ ,  $\hat{\beta}(0)$ . Якщо останні невідомі, то приймають  $\hat{\beta}(0) = 0$ ,  $P(0) = \sigma^2 \beta^* I$ ,  $\sigma^2 \beta(0) \rightarrow \infty$ .

Для спрощення аналізу покладемо, що поміхи  $N_x$  і  $N_y$  - гаусові «білі шуми», авто- і взаємо-некоректовані. Визначимо зсув  $\Delta\beta$  оцінки (10.5) відносно точного значення (10.2):

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= M\{\hat{\beta}\} - \beta^* = M\{[C^* + \delta C(N)] \cdot \{Y^* + \varepsilon^* + N_y\}\} - \beta^* = \\ &= M\{[C^* + \delta C(N)] \cdot Y^*\} - \beta^* = \\ &= [X^{*T} X^* + M\{N_x^T N_x\}]^{-1} \cdot X^{*T} Y^* - \beta^* = \\ &= [\tilde{O}^{*T} X^* + \text{diag} \sigma_i^2 \cdot \tilde{I} \cdot I]^{-1} \cdot X^{*T} \cdot Y^* - \beta^*. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Позначимо

$$X^{*T} X^* = A^*, M\{N_x^T N_x\} = \delta A, X^{*T} Y^* = B^*.$$

Тоді:

$$(A^*)^{-1} B^* = \hat{\beta}, [A^* + \delta A] \hat{\beta} = B^*.$$

$$\text{Звідси } \delta A \hat{\beta} = -A^* (\hat{\beta} - \beta^*) = -\hat{A}^* \Delta\beta,$$

$$\text{тобто } \delta A (\beta^* + \Delta\hat{\beta}) = -A^* \cdot \Delta\hat{\beta},$$

$$\text{або } \Delta\hat{\beta} = -(A^* + \delta A)^{-1} \cdot \delta A \cdot \beta^*. \quad (6.8)$$

Як бачимо, оцінка  $\hat{\beta}$  за умов навіть некорельованих «білих шумів»  $N_x$  і  $N_y$  буде занижена відносно істинної  $\beta^*$  на величину (6.8). Остання, за умови, що норма  $\|\delta A\| \rightarrow 0$ , прямує до нуля, а  $\hat{\beta}$  до  $\beta^*$ ;  $I$  за умови, що норма  $\|\delta A\| \rightarrow \infty$ , прямує до нуля.

Коваріація оцінки (6.5) за приведених вище умов, та приймаючи, що норма  $\|N_x^T \cdot \varepsilon\|$  набагато менше, ніж  $\|X^{*T}\|$  або  $\|N_x^T \cdot Y^*\|$ , наближено дорівнює:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\cong M\{[\tilde{N}_1 \cdot \varepsilon + C_2 N_{\tilde{O}}] \cdot [\tilde{N}_1 \cdot \varepsilon + C_2 N_x]^T\} = \\ &= \tilde{N}_1 \cdot \tilde{I} \cdot \{\varepsilon \cdot \varepsilon^T\} \cdot \tilde{N}_1^T + \tilde{N}_2 \cdot M\{N_x N_x^T\} \cdot C_2^T, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\text{де } \varepsilon = \varepsilon^* + N_y,$$

$$C_1 = [X *^T X * + M\{N_X N_X^T\}]^{-1} \cdot X *^T,$$

$$C_2 = [X *^T X * + M\{N_X N_X^T\}]^{-1} \cdot Y *^T.$$

Перша складова виразу (6.9) зі зростанням рівня  $N_X$  зменшується, в другій  $C_2$  зменшується, а  $M\{N_X N_X^T\}$  збільшується. Але  $C_2$  входить в вираз (6.9) квадратично, тоді як  $M\{N_X N_X^T\}$  - лінійно. Тому для «білого шуму», якщо  $M\{N_X N_X^T\} = \sigma_{N_X}^2 \cdot M \cdot I$ , зі зростанням  $\sigma_{N_X}$  коваріація оцінки  $\hat{\beta}$  буде зменшуватись. Таким чином МНК має властивість до регуляризації системи нормальних рівнянь, подібно Тихонівської. Остання полягає в мінімізації звичайного квадратичного функціоналу  $I = \varepsilon^m \varepsilon$  з регуляризуючою добавкою  $\alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}$ , де  $\alpha$  - параметр регуляризації:

$$I = \varepsilon^m \varepsilon = (Y - X *)^T (Y - X *) + \alpha^T \beta,$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = 0 = 2(X *^T X * \hat{\beta} - X *^T Y + \alpha \hat{\beta}), \quad (6.10)$$

$$\hat{\beta} = (X *^T X * + \alpha \cdot I)^{-1} \cdot X *^T \cdot Y.$$

Співставляючи (6.7) і (6.10) бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює  $\text{diag} \sigma_i^2 \cdot M$ .

## 6.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація.

В цьому методі відшуковуються МНК-оцінки по взваженим  $U^{-1}$  (от фільтрованим) даним:

$$\hat{X} = U^{-1} X, \quad \hat{Y} = U^{-1} Y,$$

що еквівалентно мінімізації функціоналу

$$I = 0,5 \sum_{j=1}^M \left\| y(j) - x(j) \cdot \hat{\beta} \right\|^2 Q^{-1}, \quad (6.11)$$

де  $Q$  - матриця ваги кожного  $j$ -го виміру:  $Q = (\text{cov} \hat{\beta}) \cdot U^T$ .

Тоді взважена вагою  $Q^{-1}$  оцінка узагальненого МНК (УМНК), отримана за умови мінімуму (6.11), дорівнює:

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} \cdot X^T Q^{-1} Y. \quad (6.12)$$

Коваріація оцінки (6.12):

$$\text{cov}\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} \cdot X^T M\{N_y N_y^T\} \cdot Q^{-1} X (X^T Q^{-1} X)^{-1}, \quad (6.13)$$

Оцінки (6.12) мають мінімальну дисперсію за умови, що

$$Q = M\{N_y N_y^T\},$$

Тоді

$$\text{cov}\hat{\beta} = [X^T \cdot M\{N_y N_y^T\} \cdot X]^{-1}, \quad (6.14)$$

Для некорельованого «білого шуму» в вимірах  $YQ = \sigma_y^2(j) \cdot I$ . Тоді рекурентна формула УМНК співпадає з взваженим МНК:

$$\hat{\beta}(j+1) = \beta(j) + P(j+1) \cdot X(j) \cdot \left(\frac{1}{\sigma_{y(j)}^2}\right) \cdot [y(j) - X^T(j)\beta(j)], \quad (6.15)$$

$$P(j+1) = P(j) - X(j)[X^T(j) \cdot P(j) \cdot X(j) + \sigma_y^2(j)]^{-1} \cdot X^T(j) \cdot P(j).$$

Неточність визначення чи апріорного завдання матриці  $Q^{-1}$  призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (6.12), (6.15). Тобто, алгоритм не є робастним: статистична незначна неадекватність матриці  $Q$  коваріації поміх  $N_y$ , визвано, наприклад, окремими збоями в даних, які утворюють в законі розподілення поміх  $N_y$  так звані «тяжкі хвости», під час оцінювання вектора  $\hat{\beta}$  за алгоритмом (6.12), це може привести до суттєвої похибки. Тому в практичній реалізації більш зручним і надійним буде квазіоптимальний УМНК:

- на першому етапі відбувається виявлення та виправлення аномальних даних та квазіоптимальне оцінювання сигналів  $X$ ,  $Y$  шляхом згладжування лінійними фільтрами їх зашумлених вибірок  $X(j)$ ,  $Y(j)$ ,  $j=1, \overline{M}$ ;

- на другому – МНК-оцінювання вектора  $\hat{\beta}$  по отриманим на першому етапі оцінкам  $\hat{X}$  і  $\hat{Y}$  точних значень  $X^*$ ,  $Y^*$  сигналів.

Для такого підходу поміхи  $N_{x_s}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $N_y$  можуть бути взаємно корельованими. Окрім того, так як модель (6.1) лінійна, то, за умови фільтрації всіх змінних  $X_i(t)$ ,  $Y(t)$  одним

лінійним фільтром, невідповідність згладжених значень  $\hat{X}^*$  і  $\hat{Y}^*$  істинним  $X^*$ ,  $Y^*$  не приводить до зміщення оцінки  $\hat{\beta}$  відносно  $\beta^*$ . Дійсно знак рівняння в (6.1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра  $W_\phi$ :

$$W_\phi \{Y^*\} = W_\phi \{\tilde{O}^* \beta^* + \epsilon^*\} = W_\phi \{\tilde{O}^*\} \cdot \beta^* + W_\phi \{\epsilon^*\}, \quad (6.16)$$

Математичне очікування оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$M\{\hat{\beta}\} = [\hat{X}^{*T} \cdot \hat{X}^* + M\{\hat{N}_x \hat{N}^T\}]^{-1} \hat{X}^* \hat{Y}^*. \quad (6.17)$$

Якщо для спрощення прийняти що  $M\{\hat{N}_x \hat{N}^T\} = \text{diag}\{\sigma_{N_s}^2\} \cdot I$ , а також покласти, що власні числа матриці  $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}$  менше одиниці, то вираз  $[I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}]^{-1}$  можна представити рядом. Тоді:

$$\begin{aligned} (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*) \hat{\beta} &= [I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}]^{-1} \cdot \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* \cong \\ &\cong [I - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}] \cdot \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*, \end{aligned}$$

Звідси:

$$\hat{\beta} \cong (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-2} \cdot \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}^{-1} \cdot \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*,$$

Враховуючи, що:

$$\beta \cong (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta \hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta = -\text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\} (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \hat{\beta}^*. \quad (6.18)$$

Так як норма  $\Delta \beta$  не більше добутку норм складових правої частини (6.18), то справедлива нерівність:

$$\frac{\|\hat{\Delta \beta}\|}{\|\hat{\beta}^*\|} \leq \left\| \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\} \right\| \cdot \|\hat{X}^{*T} \hat{X}^*\|^{-1}. \quad (6.19)$$

Чим сильніше фільтрація  $X$ ,  $Y$  оператором  $W_\phi$  фільтра, тим менше норма матриці збурень  $\sigma_{N_i}^2$ . Тобто фільтр подавляє поміхи, не порушуючи рівняння (6.16). Але згладжування



фільтром складових  $X_i(t)$  вектор-функції  $X(t)$  завужує їх частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність. Зменшується число обумовленої матриці  $(\hat{X}^*{}^T \hat{X}^*)$  і, як наслідок, збільшується норма зворотної матриці  $(\hat{X}^*{}^T \hat{X}^*)^{-1}$ . Тому для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення згладжуючого ефекту фільтра  $W_\phi$ , за якого норма зміщення (6.19) буде мінімальною.

Коваріація оцінки  $\hat{\beta}$  за методом УМНК при допущені взаємонекорельованості помих, подібна до МНК (6.9), але матриці  $M\{\varepsilon\varepsilon^T\}$ ,  $M\{N_y N_y^T\}$  вже не діагональні. Чим далі рознесені спектри сигналу і помиху, тим краще фільтрація і, відповідно, оцінки квазіоптимального УМНК.

## 6.3 Інтегрований МНК

### 6.3.1. Загальні положення.

МНК- і УМНК-оцінки попередніх методів знаходяться як координата точки мінімуму відповідних функціоналів  $\varepsilon^T \varepsilon$  і  $\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}$ . Так як функціонал є усередненим на кінцевому інтервалі  $T$  значенням квадрата  $\varepsilon$  чи  $\hat{\varepsilon}$ , які є сумішшю корисного сигналу  $Y^* - X^* \beta$  і випадковою збурення  $N_y - N_x \beta$ , то він, як функція від  $\beta$  не є точним. Відомо, що операція диференціювання  $\frac{\partial}{\partial \beta}(\varepsilon^T \varepsilon)$  зашумленої функції  $\varepsilon^T \varepsilon$  є некоректною. Цим обумовлена невисока точність МНК-оцінок на коротких сильно зашумлених вибірках даних  $X$ ,  $Y$ . УМНК дещо покращує точність завдяки згладжуванню помиху в  $X$ ,  $Y$ . Але на коротких вибірках впливає на точність фільтрації невизначеність краєвих умов. Окрім цього згладжування зменшує обумовленість матриці  $\hat{X}^T \hat{X}$ , що еквівалентно зменшенню крутизни функціонала. Тоді знову зростає область невизначеності  $G$  оцінки  $\hat{\beta}$ . Бажаємо зменшити розкид значень функціоналу, не зменшуючи його кривизни в зоні екстремума. Це можливо зробити для незгладжених  $X$ ,  $Y$  шляхом додаткового усереднення по множині

квазістатистично незалежних функціоналів, близьких до середньо квадратичного. Такими функціоналами можуть бути зсунуті у часі  $t$  на інтервал  $\theta$  середні добутки  $\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \varepsilon(t + \theta) dt$ . Усереднюючи їх на інтервалі  $[-\tau_1, \tau_1]$ , отримаємо критерій:

$$J^2 = \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t + \theta) dt d\theta, \quad (6.20)$$

де  $\eta(\theta)$  - функція ваги, в найпростішому вигляді одинична.

Необхідна умова мінімуму  $J$  по  $\hat{\beta}_k = \overline{1, n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \hat{\beta}_k} &= \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \left[ \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \hat{\beta}_k} \cdot \varepsilon(t + \theta) + \varepsilon(t) \cdot \frac{\partial \varepsilon(t + \theta)}{\partial \hat{\beta}_k} \right] dt d\theta = \\ &= \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T (-x_k(t)) \cdot \left[ y(t + \theta) - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \cdot x_i(t + \theta) \right] dt d\theta + \\ &+ (-x_k(t + \theta)) \left[ y(t) - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \cdot x_i(t) \right] = 0, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

З виразу (6.21) витікає система нормальних рівнянь:

$$A \cdot \hat{\beta} = B, \quad (6.22)$$

де  $A$  - матриця  $n \times 13$  з елементами  $a_{ik}$ ;  $B$  - матриця-стовпчик  $n \times 13$  з елементами  $b_k$ ;

$$a_{ik} = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T [(x_i(t + \theta)) x_k(t) + x_i(t) x_k(t + \theta)] dt d\theta, \quad (6.23)$$

$$b_k = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T [(y_i(t + \theta)) x_k(t) + y(t) x_k(t + \theta)] dt d\theta, \quad (6.24)$$

Для дискретних у часі  $t$  вибірок інтеграли замінимо відповідними сумами. Тоді:

$$a_{ik} = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(x_i(j+l)) x_k(j) + x_i(j) x_k(j+l)], \quad (6.25)$$

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(y(j+l)) x_k(j) + y(j) x_k(j+l)]. \quad (6.26)$$

Рішення системи (6.22) дає шукану оцінку  $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta} = A \cdot B. \quad (6.27)$$

### 6.3.2. Аналіз складових метода

Проаналізуємо наскільки ця оцінка відрізняється від істинної  $\beta^*$  (6.2). Для цього спочатку розглянемо одну із складових суми по

$$l^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M \varepsilon(j) \cdot \varepsilon(j+l),$$

(6.28) наприклад, якщо  $l=-m$ . Тобто зсув  $\tau = -m\Delta t$ , де  $\Delta t$  – крок дискретності вимірів  $X$ ,  $Y$  у часі  $t$ . Тоді, без урахування ваги  $\eta(m)$ ,  $-m$ -а складова дискретної моделі інтегрокореляційного критерію (6.28) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\hat{\Delta}} \varepsilon_{-\tau} = \frac{1}{2} (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^T (Y_{-\tau} - X_{-\tau} \hat{\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} Y_0^T Y_{-\tau} - \frac{1}{2} \hat{\beta} (X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) + \frac{1}{2} \hat{\beta}^T X_0^T X_{-\tau} \hat{\beta}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

де індекс  $-\tau$  означає зсув  $x_i(t)$ ,  $y(t)$  на  $\tau=m\Delta t$ :

$$\begin{aligned} X_{-\tau} &= \begin{bmatrix} x_1(1) \dots x_n(1) \\ x_1(2) \dots x_n(2) \\ \dots \\ x_1(M-m) \dots x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(M-m) \end{bmatrix}, \\ X_0 &= \begin{bmatrix} x_1(m+1) \dots x_n(m+1) \\ x_1(m+2) \dots x_n(m+2) \\ \dots \\ x_1(M) \dots x_n(M) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \dots \\ y(M) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Якщо зсув  $\tau$  в (6.29) більше часу кореляції шумів  $N$  і  $\varepsilon$ , то математичне очікування  $I_m$  (6.29) буде інваріантне до цих шумів.

$$\hat{I} \{^2_m\} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^{*\hat{\Delta}} \varepsilon_{-\tau}^{*}.$$

Необхідна умова мінімуму  $I_m$ :

$$\frac{\partial \mathcal{I}_m}{\partial \beta} = -\frac{1}{2}(X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) + \frac{1}{2}(X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) \hat{\beta} = 0, \quad (6.30)$$

достатня умова

$$\frac{1}{2} \det(X_0^T X_{-\tau} + X_{-\tau}^T X_0) > 0. \quad (6.31)$$

На відміну від МНК для додатної визначеності матриці  $(X_0^T X_{-\tau} + X_{-\tau}^T X_0)$  в (6.31) недостатньо лінійної незалежності функції  $x_i(k)$ . Визначимо верхню границю  $\tau_{cp}$  для зсуву  $\tau$ , за якого нерівність (6.31) перетворюється в рівність, тобто система стає виродженою.

Так як поміха  $N$  лише покращує обумовленість матриці  $X^T X$ , то при виведенні  $\tau_{cp}$  будемо брати  $N = 0$ ,  $X = X^*$ . Представимо  $X_{-\tau}^*$  рядом Тейлора:

$$\tilde{O}_{-\tau}^* = X_0^* - \tau_0 \dot{X}_0^* + R_J(\ddot{X}_0^*), \quad (6.32)$$

де  $\dot{X}_0^* = \frac{d}{dt} X_0^*$ ,  $R_I(\ddot{X}_0^*)$  - матриця залишкових членів в розкладенні (10.32). З точністю до  $R_I(\ddot{X}_0^*)$  маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X_0^{*T} X_{-\tau}^* + X_{-\tau}^{*T} X_0^*) &\doteq \frac{1}{2}[X_0^{*T}(X_0^* - \tau \dot{X}_0^*) + (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*)^T X_0^*] = \\ &= X_0^{*T} X_0^* - \frac{\tau}{2}(X_0^{*T} \dot{X}_0^* + \dot{X}_0^{*T} X_0^*) = \tilde{A} - \frac{\tau}{2} \tilde{A}_I, \end{aligned} \quad (6.33)$$

де  $\Gamma$ ,  $\Gamma_I$  - симетричні матриці.  $\Gamma$  - матриця Грама, тому вона додатньо визначена. Відомо, що дві симетричні матриці, з яких одна додатньо визначена перетворенням  $T$ , можна одночасно привести до діагонального виду так, що на діагоналі матриці  $\Gamma$  будуть всі одиниці, а на діагоналі  $\Gamma_I$  - власні значення  $\lambda_i$  матриці  $\Gamma^{-1}$  (для (6.33) -  $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma_I$ ):

$$\tilde{O}^{-1} \left( \tilde{A} - \frac{\tau}{2} \tilde{A}_I \right) T = \begin{bmatrix} 1 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 1 \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots \lambda_{1n} \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

Граничне значення  $\tau_{cp}$  зсуву визначається за умови:

$$I - \frac{\tau_p}{2} \max \lambda_{li} = 0,$$

або

$$\tau_{ad} = \frac{2}{\max \lambda_{li}}, \quad (6.35)$$

де  $\lambda_{li}$  – власні значення матриці  $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma$ . Зрозуміло, що чим більше  $\tau$ , тим гірше обумовлена матриця  $\Gamma$  (Більше  $\|\Gamma^{-1}\|$ ), тим більше  $\max \lambda_{li}$ , як наслідок, менше граничний зсув  $\tau_{gr}$ .

Розглянемо, як вплине симетрія зсуву  $\pm \tau$  на граничне значення. Тут

$$I = \varepsilon_0^T (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) = (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^T (Y_\tau + Y_{-\tau} - (X_\tau + X_{-\tau}) \hat{\beta}) = Y_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) - \hat{\beta}^T [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] + \hat{\beta}^T X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) \hat{\beta}, \quad (6.36)$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \cdots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \cdots & x_n(m+2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M-m) & \cdots & x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

$$X_\tau = \begin{bmatrix} x_1(2m+1) & \cdots & x_n(2m+1) \\ x_1(2m+2) & \cdots & x_n(2m+2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M) & \cdots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y_\tau = \begin{bmatrix} y(2m+1) \\ y(2m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix},$$

де

$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M-2m) & \cdots & x_n(M-2m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-2m) \end{bmatrix}, \tau = m.$$

Необхідно умова мінімуму  $I$ :

$$\frac{\delta I}{\delta \beta^T} = [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] + \quad (6.37)$$

$$+[X_0^T (Y_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0] \hat{\beta} = 0,$$

Достатня умова мінімуму  $I$ :

$$\det \frac{\delta I}{\delta \beta^T \delta \beta} = |X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0| > 0, \quad (6.38)$$

Аналогічно виводу (6.35) знайдемо граничне із умови, що (6.38) дорівнює нулю. Розглянемо вже три члена ряду (6.32):

$$X_\tau^* = X_0^* + \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}^*, \tau), \quad (6.39)$$

$$X_{-\tau}^* = X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}, -\tau).$$

З точністю до  $R_3(\ddot{X}, \pm\tau)$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{O}_0^{*\circ} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0 &\approx \\ \approx \tilde{O}_0^{*\circ} X_0^* + \frac{\tau^2}{4} [\tilde{O}_0^{*\circ} \ddot{X}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} \tilde{O}_0^*] &= \tilde{A} + \frac{\tau^2}{4} \tilde{A}_2, \end{aligned} \quad (6.40)$$

де  $\Gamma$  і  $\Gamma_2$  - подібні матриці до (6.34),  $\Gamma$  - додатньо-визначена матриця Грама. Тоді, як і (6.34), вираз (6.40) приводиться перетворенням  $\Gamma$  до виду:

$$\tilde{O}^{-1} (\tilde{A} + \frac{\tau^2}{4} \tilde{A}_2) \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{21} & 0 \\ 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

де  $\lambda_{2i}$  - власні значення матриці  $\frac{\tau^2}{4} \Gamma^{-1} \Gamma_2 (i = )$ .

Граничне значення зсуву  $\tau$  буде визначатися з умови

$$I + \frac{\tau_{zp}^2}{4} \max \lambda_{2i} = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гп}} = \frac{2}{\sqrt{\max |\lambda_{2i}|}}, \quad (6.42)$$

де, на відміну від (6.35) для несиметричного зсуву,  $\max \{\lambda_{2i}\}$  береться по множині  $\{\lambda_{2i}\}$  від'ємних власних значень матриці

$\frac{\tau^2}{4} T^{-1} \Gamma_2$ . Якщо продовжити розкладання (6.39) і підставити його в (6.38), легко впевнитися, що всі непарні члени розкладання (6.38) скоротяться. Таким чином, для точних  $X^*$  матриця  $\tilde{O}_0^{*\delta}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^*$  відрізняється від матриці  $*$  МНК лише парними членами розкладання (6.39). ураховуючи припущення гладкості  $x_0(t)$ .

Можна очікувати, що ця різниця буде суттєво менше, ніж в (6.31) для точних  $X^*$ , так як там присутні всі члени розкладання (6.39). Таким чином, граничне значення 6.42) більше, ніж (6.35), а при тому ж  $\tau$  показник (6.36) при неточних  $X = X^* + N$  ближче до показника МНК (при точних  $X^*$ ), ніж показник (6.29). Щоб це підтвердити, розглянемо зсув і коваріацію оцінки  $\hat{\beta}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= [\tilde{O}_0^\delta(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0]^{-1} * \\ &* [\tilde{O}_0^\delta(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

### 6.3.3. Зміщення оцінки

Зсув  $\Delta \hat{\beta}$  :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\beta} &= M \{ \hat{\beta} - \beta^* \} = M \{ [\tilde{O}_0^\delta(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0]^{-1} * \\ &* [\tilde{O}_0^\delta(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] - (\tilde{O}_0^{*\delta} X_0^*)^{-1} (\tilde{O}_0^{*\delta} Y_0^*) \}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

або

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\beta} &= M \{ [\tilde{O}_0^\delta(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0]^{-1} * \\ &* M \{ [\tilde{O}_0^\delta(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] \} - (\tilde{O}_0^{*\delta} X_0^*)^{-1} (\tilde{O}_0^{*\delta} Y_0^*) = \\ &= [\tilde{O}_0^{*\delta}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0^* + M \{ N_0^T (N_\tau + N_{-\tau}) + \\ &+ (N_\tau + N_{-\tau})^T N_0 \}]^{-1} * \tilde{O}_0^\delta(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 + \\ &+ M \{ [X_0^{*T} (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T \varepsilon_0] \} - (\tilde{O}_0^{*\delta} X_0^*)^{-1} \tilde{O}_0^{*\delta} Y_0^*. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Скориставшись розкладанням (6.39) і формулою (6.40), отримаємо :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\beta} = & [(4\Gamma + \tau^2 \Gamma_2) + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} * \\ & * [4(X_0^{*T} Y_0^* + \tau^2 (X_0^{*T} \ddot{Y}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} Y_0^*)) + 2(M - 2m) * \\ & * (R_{X_\varepsilon}^{*}(\tau) + R_{X_\varepsilon}^{*}(-\tau)) - \Gamma^{-1} X_0^{*T} X_0^*, \end{aligned} \quad (6.46)$$

де  $R_{NN}(\tau)$  – матриця  $(n \times n)$  кореляційних функцій  $R_{N_i N_j}(\tau)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $R_{X_\varepsilon}^*(\pm \tau)$  – вектор-стовпчик  $(n \times 1)$  кореляційних функцій  $R_{X_i \varepsilon_j}(\pm \tau)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Зсув  $\Delta \hat{\beta}$  визвано членами  $(M - 2m)R_{NN}(\tau)$  і  $(M - 2m)[\{R_{X_\varepsilon}(\tau) + R_{X_\varepsilon}(-\tau)\}]$ . Член при  $\tau$  більшому часу кореляції поміх, дорівнює нулю. Друга складова

$$(M - 2m)[R_{X_\varepsilon}(\tau)] \approx \frac{\tau^2}{2} (X_0^{*T} \ddot{\varepsilon}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} \varepsilon_0^*). \quad (6.47)$$

Тоді

$$\Delta \hat{\beta} = (2\tilde{A} + \frac{\tau^2}{4} \tilde{A}_2)^{-1} (M - 2m) ((R_{X_\varepsilon}(\tau)) + R_{X_\varepsilon}(-\tau)). \quad (6.48)$$

Звідси бачимо, що зсув  $\Delta \hat{\beta}$  зменшився, якщо виконується нерівність

$$\left( \frac{M - 2m}{M - m} \right) \left\| (2\tilde{A} + \frac{\tau^2}{2} \tilde{A}_2)^{-1} \right\| < \left\| (2\tilde{A} - \tau \tilde{A}_1)^{-1} \right\|, \quad (6.49)$$

або за того ж зміщення  $\Delta \hat{\beta}$  оцінки  $\hat{\beta}$ , граничне  $\tau_{zp}$  зросло.

Оцінка дисперсії оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M\{(\hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\})(\hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\})^T\}.$$

Подано  $\hat{\beta}$  із (6.43) наступним чином :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & [\ddot{O}_0^*(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) + \\ & + \xi(X^*, N, \tau)]^{-1} [(\ddot{O}_0^* + N_0^T)(Y_\tau^* + \varepsilon_\tau + Y_{-\tau}^* + \varepsilon_{-\tau}) + \\ & + (X_\tau^* + N_\tau + X_{-\tau}^* + N_{-\tau})^T (Y_0^* + \varepsilon_0)]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

За великих  $M$ , нехтуючи випадковою складовою і випадковими компонентами  $[N_0^T(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}), (N + N_{-\tau})\varepsilon_0]$  другого порядку малості, позначивши:



$$\begin{aligned}
C'_1 &= [X_0^{*\tau} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} X_0^{*\tau}, \\
C''_1 &= [X_0^{*\tau} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} X_{-\tau}^{*\tau}, \\
C'''_1 &= [X_0^{*\tau} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} X_\tau^{*\tau}, \\
C'_2 &= [X_0^{*\tau} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_0^*, \\
C''_2 &= [X_0^{*\tau} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_{-\tau}^*, \\
C'''_2 &= [X_0^{*\tau} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_\tau^*.
\end{aligned}$$

отримаємо :

$$\begin{aligned}
cov[\hat{\beta}] &\equiv M\{[C'_1(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (C'_1 + C''_1)\varepsilon_0 + C'_2(N_\tau + N_{-\tau}) + (C'_2 + C''_2)N_0] \times \\
&\times C'_1(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (C'_1 + C''_1)\varepsilon_0 + C'_2(N_\tau + N_{-\tau}) + (C'_2 + C''_2)N_0]^T\} = \\
&= C'_1 M\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\} C_1^T + C'_1 M\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^T\} (C'_1 + C''_1)^T + \\
&+ (C'_1 + C''_1) M\{\varepsilon_\tau \varepsilon_{-\tau}^T\} C_1^T + C'_1 M\{(N_\tau + N_{-\tau})N_0^T\} (C'_1 + C''_1)^T + \\
&+ (C'_1 + C''_1) M\{N_0(N_\tau + N_{-\tau})^T\} C_1^T + (C'_1 + C''_1) M\{N_0 N_{\tau 0}^T\} (C'_1 + C''_1)^T.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

або

$$\begin{aligned}
cov[\hat{\beta}] &= C'_5 [M\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\} + 2M\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^T\} + \\
&+ 2M\{\varepsilon_0(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\} + M\{\varepsilon_0 \varepsilon_{\tau 0}^T\} C_5^T] + C'_6 M\{N_0(N_\tau + N_{-\tau})^T\} + \\
&+ M\{N_0 N_{\tau 0}^T\} C_6^T = C_5 Q_3 C_5^T + C_6 F_3 C_6^T,
\end{aligned} \tag{6.52}$$

де  $C'_1 \approx C''_1 \approx C'''_1 = C_5$ ,  $C'_2 \approx C''_2 \approx C'''_2 = C_6$ .

Враховуючи співвідношення (6.49), для  $|\tau| > 0$  можна очікувати, що:  $\|C_3\| > \|C_5\| > \|C_1\|$ ,  $\|C_4\| > \|C_6\| > \|C_2\|$ , тоді як:  $\|Q_3\| = \|Q_2\|$ ,  $\|F_3\| = \|F_2\|$ , внаслідок того, що в (6.52) має місце співвідношення діагональних і нільпонтентних матриць. Тому при рівних  $\tau$  зсув і коваріація оцінок  $\hat{\beta}$  при  $\pm \tau$  буде менше, ніж для  $-\tau$ . Тобто симетричний зсув наближає критерії  $\varepsilon_0^T(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})$  до ідеального  $\varepsilon_0^{*T} \varepsilon_0^*$ .

Таким чином, кожна  $m$ -а складова інтегро-кореляційного критерію (6.28) в межах зсуву  $\pm m\Delta t = \pm \tau$ , меншого по модулю, ніж  $\tau_{rp}$  (6.42), при її мінімізації дає оцінку  $\hat{\beta}$  (6.43), близьку до

істинної  $\beta^*$ , якщо зсув  $\tau$  більший часу  $T_{\text{кор}}$  кореляції поміх і менш граничного  $\tau_{\text{гр}}$ .

#### 6.3.4. Рекурентна форма обчислення

Розглянемо рекурентну форму обчислення по критеріям (6.29) і (6.36) для  $M$  вимірів кроком  $\Delta t$ , тобто

$$t_k = k\Delta t, \quad k = \overline{1, M}, \quad (6.53)$$

$$I = \sum_{k=1}^M [y(k) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k)] [y(k+m) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k+m)]. \quad (6.54)$$

З умови (6.30) отримаємо систему :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M [y(k)x_j(k+m) + y(k+m)x_j(k)] = \\ = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \sum_{k=1}^M [x_i(k)x_j(k+m) + x_j(k+m)x_i(k)], \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

або у векторній формі :

$$\hat{\beta} = X^T Y_m + X_m^T Y_0. \quad (6.56)$$

Позначимо

$$P = [X_0^T X_m + X_m^T X_0]^{-1}, \quad (6.57)$$

Тоді

$$\hat{\beta}_2 = P(X^T Y_m + X_m^T Y_0), \quad (6.58)$$

Представимо (6.57) в блочному вигляді для  $(k+1)$ -го виміру:

$$\begin{aligned} P_{k+1} = [X_{0k}^T X_{mk} + X_{mk}^T X_{0k}]^{-1} = [[X_{0(k-1)}^T X_{m(k-1)} + X_{m(k-1)}^T X_{0(k-1)}] + \\ + [x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T]]^{-1} = [P_k^{-1} + [x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T]]^{-1}, \\ x_{0k}^T = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)], \end{aligned}$$

де

$$x_{mk}^T = [x_1(k+m), x_2(k+m), \dots, x_n(k+m)]. \quad (6.59)$$

Із (6.59) знайдемо, що

$$P_{k+1}^{-1} - P_k^{-1} = x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T. \quad (6.60)$$

Тоді для  $k$ -го виміру отримуємо  $\hat{\beta}$  (6.58) :

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(k+1) &= P_{k+1}(X_{0(k-1)}^T Y_{mk} + X_{mk}^T Y_{0k}) = \\
&= P_{k+1}[[X_{0k}^T, x_{0k}] \begin{bmatrix} Y_{m(k-1)} \\ y(k+m) \end{bmatrix} + [X_{m(k-1)}^T, x_{mk}] \begin{bmatrix} Y_{0(k-1)} \\ y(k) \end{bmatrix}] = \\
&= P_{k+1}[P_k^{-1} \hat{\beta}(k) + x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k)] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1}[x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) + (P_k^{-1} - P_{k+1}^{-1}) \hat{\beta}(k)]. \quad (6.61)
\end{aligned}$$

Із (6.61), враховуючи (6.60), отримаємо :

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1}[x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) - \\
&\quad -(x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T) \hat{\beta}_2(k)] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1}[x_{0k} \varepsilon(k+m) + x_{mk} \varepsilon(k)],
\end{aligned}$$

де  $P_{k+1}$  -визначено згідно до (6.59),

$$\varepsilon(e) = y(e) - x_e^T \beta(e), e = k, k+m$$

Для критерію (6.36), з умови мінімуму, отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M [(y(k+m) + y(k-m)x_j(k) + y(k)(x_j(k+m) + x_j(k-m)))] = \\
&= \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i [(x_i(k+m) + x_i(k-m))x_j(k) + x_i(k)(x_j(k+m) + x_j(k-m))] \quad (6.63)
\end{aligned}$$

або у векторній формі:

$$[X_0^T Z + Z^T X_0] \hat{\beta} = X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0,$$

де

$$Z = X_m + X_{-m}. \quad (6.64)$$

Позначимо:

$$[X_0^T Z + Z^T X_0]^{-1} = P \quad (6.65)$$

Тоді

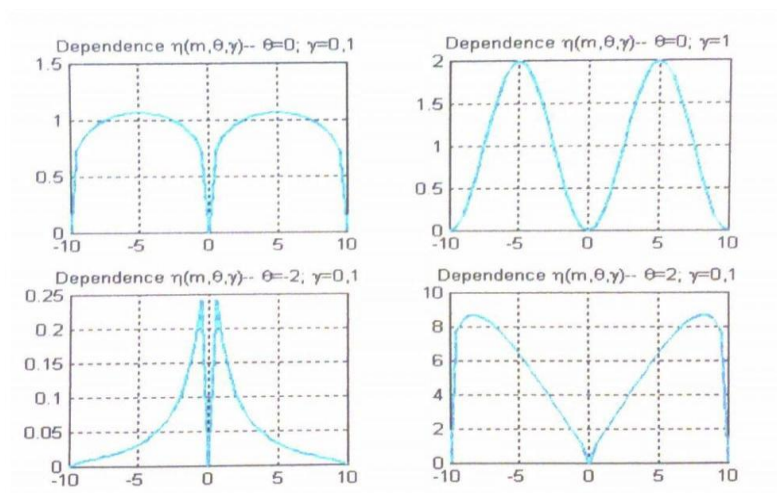
$$\hat{\beta} = P[X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0]. \quad (6.66)$$

### 6.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК

В умовах невизначеності характеристик збурень  $N_x i N_y$ , вибір вагової функції  $\eta(m)$  функціонал (6.20) слід виконувати за зовнішнім (головним) показником  $I$ . Будемо відшукувати  $\eta(m)$  в класі симетричних відносно  $m=0$  фінітних функцій (таких, що  $\eta(0)=\eta(\pm m)=0$ )), наприклад наступного виду:

$$\eta(m) = \eta(m, \gamma, \theta) = (1 + |m|)^{\theta} \cdot \left( 1 - \cos \frac{1\pi m}{m_{kp}} \right)^{\gamma}, \quad (6.67)$$

де  $\theta \in (\pm\infty), \gamma \in (0, \infty), m_{kp}$  визначається за умови (6.42), параметри  $\theta$  і  $\gamma$  оптимізуються (в системах класу БАСІ) по головному показнику  $I$ . Параметр  $\gamma$  впливає на ширину імпульсу  $\eta(m)$ , а  $\theta$ -на його асиметрію відносно максимуму (рис.6.1). Якщо  $\gamma \rightarrow 0$  то  $\eta(m)$  прямує до прямокутного імпульсу; якщо  $\gamma \rightarrow \infty$ , то  $\eta(m)$ - до  $\delta$ - функції Дірака, маємо оцінку (6.43).; якщо  $\theta \rightarrow 0$ , то імпульси  $\eta(m)$  симетричні відносно їх максимумів; якщо  $\theta \rightarrow \infty$ , то імпульс  $\eta(m)$  наближається до  $m=0$ , а метод до МНК; якщо  $\theta \rightarrow -\infty$ , то маємо оцінку (6.43) для  $m = m_{kp}$ . Змінюючи  $\theta$  і  $\gamma$  за умови екстремуму  $I$  можна забезпечити оптимальність оцінки (6.27) інтегрованого МНК.



## 6.4 Метод адаптивного одноразового ділення (МОД)

### 6.4.1 Сутність методу

Даний метод можна розглядати як метод допоміжних змінних, в якому допоміжна змінна

Рис. 6.1 Залежність  $\eta(m, \theta, \gamma)$

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1) u_2(1) \dots u_n(1) \\ u_1(M) u_2(M) \dots u_n(M) \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

має наступний вигляд:

$$u_{ij} = \begin{cases} x_i^{-1}(j), & |x_i^{-1}(j)| \geq \Delta_i; \\ 0, & |x_i^{-1}(j)| < \Delta_i, j = \overline{1, M}, \Delta_i > 0. \end{cases}$$

Система функцій  $\{x_i^{-1}(j)\}$  лінійно незалежна, так як за умовою  $\{x_i(j)\}$  лінійно незалежна.

Згідно методу допоміжних змінних, існує оцінка  $\hat{\beta}$ , яка може бути знайдена з рівняння

$$U^T Y = U^T X \hat{\beta}, \quad (6.69)$$

$$\hat{\beta} = (U^T X)^{-1} U^T Y, \quad (6.70)$$

де

$$U^T X = \begin{bmatrix} M & \sum_{k=1}^M x_2(k) x_1^{-1}(k) & \cdots & \sum_{k=1}^M x_n(k) x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k) x_2^{-1}(k) & M & \cdots & \sum_{k=1}^M x_n(k) x_2^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k) x_n^{-1}(k) & \sum_{k=1}^M x_2(k) x^{-1}(k) & \cdots & M \end{bmatrix}$$

$$U^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M y(k) x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M y(k) x_2^{-1}(k) \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^M y(k) x_n^{-1}(k) \end{bmatrix}$$

і розглядається множина  $M$  відліків  $k$ , у яких виконується умова:

$$|x_j^{-1}(j)| \geq \Delta_i.$$

### 6.4.2. Зміщення оцінок

Якщо перешкоди  $N_i$  не корелюють між собою, а також з  $X^*, Y^*$  і малі, то, вважаючи наближено

$$x_i^{-1}(j) = x_i^{*-1}(j) - N_i(j), \quad (6.71)$$

неважко отримати, що оцінка  $\hat{\beta}$  для точної структури моделі, коли  $\varepsilon^* = 0$ , буде незміщеною, так як  $M\{U^T X\} = U^{*T} X^*, M\{U^T Y\} = U^{*T} Y^*$ . Зміщення може мати місце, якщо  $\varepsilon^* \neq 0$ . При цьому

$$\hat{\delta\beta} = (U^{*T} X^*)^{-1} U^{*T} \varepsilon^*, \quad (6.72)$$

так як з умови  $X^{*T} \varepsilon^* = 0$  взагалі не випливає умова  $U^{*T} \varepsilon^* = 0$ , хоча  $U^*$  та  $X^*$  зв'язані співвідношенням (6.68). Зміщення (6.72) менше зміщення оцінок МНК через перешкоди  $N_i$  в  $X$ , якщо вплив  $\varepsilon^* \neq 0$  (на 6.72) менше впливу перешкод  $N$  на зміщення оцінок МНК.

### 6.4.3. Коваріація оцінок (6.70)

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M \left\{ \left[ \hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\} \right] \left[ \hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\} \right]^T \right\}.$$

Вважаючи некорелірованість випадкових похибок в  $i$  розкладаючи (6.70) у ряд

$$\hat{\beta} \approx M\{\hat{\beta}\} + \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} \left[ \delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon} \right],$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &= \\ &= M \left[ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} [\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}] \right]^* \\ &* \left[ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} [\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}] \right]^T = \\ &= M \left\{ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] [U^{*T} Y^*]^T \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right]^T \right\} + \quad (6.73) \\ &+ [U^{*T} X^*]^{-1} Y^{*T} M \{ \delta U \delta U^T \} \left[ (U^{*T} X^*)^T \right]^{-1} Y^* + \\ &+ [U^{*T} X^*]^{-1} U^{*T} M \{ \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^T \} \left[ (U^{*T} X^*)^T \right]^{-1} U^*, \end{aligned}$$

де перший і другий компоненти залежать від порогів  $\Delta_i$  у (6.68) і від шумів  $N$  в  $X$ , а третій – від шумів у  $Y$ . При зменшенні порога  $\Delta$  до нуля перший компонент (як і в МНК, яка залежить від  $N$ ) прямує до нуля, так як при  $\Delta \rightarrow 0$  можуть існувати точки  $k$ , у яких  $u_i(k) \rightarrow \infty$ , а отже,  $\| (U^T X)^{-1} \| \rightarrow 0$ . При  $\Delta \rightarrow \infty$   $u \rightarrow 0$ ,  $(U^T X)^{-1} \rightarrow \infty$ , тобто перший компонент при зменшенні  $\Delta$  спадає. Другий компонент (6.73) пропорційний коваріаційній матриці  $M\{\delta U \delta U^T\}$  і при  $\Delta \rightarrow 0$  прямує до нескінченності, а при  $\Delta \rightarrow \infty$  – до нуля. Третій компонент від  $\Delta$  не залежить. Отже, для конкретних умов існує оптимальний вектор порогів  $\Delta^*, \Delta_i^*, i = \overline{1, n}$ , за якого норма коваріації мінімальна. Якщо перешкоди  $N_i$  некорельовані, а  $\varepsilon^* \rightarrow 0$ , то оцінка (6.70) буде незміщеною.

Ефективність оцінок оптимізується в БАСІ по основному показнику  $I_{qk}$  шляхом підбору вектора  $\Delta$ .

### 6.5 Метод прогнозу кореляцій

Постановка задачі така ж, як і в попередньому методі: сигнали  $X^*, Y^*$  гладкі, перешкоди  $\varepsilon, N$  взаємно некорельовані, нормовані кореляційні функції перешкод затухають швидше, ніж відповідні функції сигналів  $X^*, Y^*$ ; по зашумленим виборкам  $X, Y$  треба отримати оцінку  $\hat{\beta}$ , близьку до оцінки МНК для точних даних.

Згідно МНК,

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = A^{-1} B, \quad (6.74)$$

де  $A = [a_{ij}]_{i=1}^n$ ,  $B$  – вектор-стовпець скалярних добутоків  $(y(k), x_i(k))$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Коефіцієнти  $a_{ij}$  можна подати як відповідні кореляційні функції при нульовому зсуві змінних:

$$a_{ij} = MR_{x_i x_j}(0); b_i = MR_{y x_i}(0). \quad (6.75)$$

Відповідно для зсуву  $m$  маємо

$$a_{ij}^{(m)} = MR_{x_i x_j}(m); b_i^{(m)} = MR_{y x_i}(m), \quad (6.76)$$

Нехай  $R_{x_i x_i}(\tau) = R_{x_i x_i}^*(\tau) + \delta R_{x_i x_i}(\tau)$ ,  $0 < \tau < r + m$ , де  $\delta R_{x_i x_i}$  – похибка, в основному пов'язана з шумами  $N_i$  у вимірах  $x_i$ .

Покладемо в інтервалі  $[m, rm]$  лінійну модель автокореляції

$$\hat{R}_{x_i x_i}(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1(\tau - \tau_{\text{по}}), \quad (6.77)$$

Тоді в якості оцінок коефіцієнтів  $a_{ij}$  в (6.74) візьмемо прогнозні в точку  $k=0$  оцінки (6.77) кореляційних функцій, побудованих на інтервалі  $[m, rm]$ , де кореляція поміх майже відсутня:

$$\alpha_{ii} = MR_{x_i x_i}(0) = \alpha_{0i}; a_{ij} = MR_{x_j x_j}(0), i \neq j; b_i = MR_{y x_i}(0). \quad (6.78)$$

В рівнянні (6.77) моделі  $\widehat{R_{x_i x_i}}$



$$\tau_{cp} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} \tau_k; \alpha_0 = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} R_{x_i x_i}(\tau_k);$$

$$\alpha_{ii} = \sum_{i=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{cp}) R_{x_i x_i}(\tau_k) / \sum_{k=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{cp})^2.$$

Тоді (6.74) і (6.78) визначають  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_0$  - оцінку по даному методу – методу прогнозу кореляцій (МПК). Позначимо

$\alpha_{ii} - \alpha_{ii} = \delta a_{ii}, \delta A = [\delta \alpha_{ii}]_{i=1}^n$  – вектор-стовбець;

Ед $\alpha = \delta A_{\text{МПК}}, A = A^* + \delta A_{\text{МПК}}$ , де через  $A^*$  позначена матрицю  $A$  для МНК за відсутності шумів.

Використовуючи розкладання в ряд Тейлора, в загальному випадку отримаємо

$$\begin{aligned} \delta B &= (A^* + \delta A)^{-1} B^* - A^{*-1} B^* \approx \\ &\approx A^{*-1} B^* - (A^{*-1})^2 \delta A B^* - A^{*-1} B^* = \\ &= -A^{*-1} \delta A A^{*-1} B^* = -A^{*-1} \delta A \beta^*. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Розглянемо два випадки:

1) на рис.6.4, а  $R_{x_i x_i^*}(\tau), \tau \in [0, r+m]$  - опукла функція. Тоді  $\alpha_{ii} > \hat{\alpha}_{ii}, \delta A_{\text{МНК}} > A_{\text{МПК}}$ . Отже,  $\|\delta \beta_{\text{МПК}}\| < \|\delta \beta_{\text{МНК}}\|$ ;

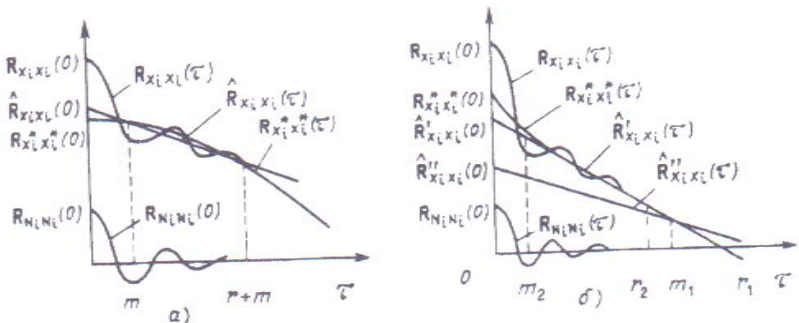


Рис.6.4. Графік лінійної екстраполяції опуклої (а) і увігнутої (б) кореляційних функцій.

2) на рис.6.3, б  $R_{x_i^* x_i^*}(\tau)$  - увігнута функція. Підбором інтервала  $(m, r)$  можна досягнути аналогічного результату і в цьому випадку. Із малюнка видно, що інтервал  $(m_2, r_2)$  задовольняє цим вимогам на відміну від інтервалу  $(m_1, r_1)$ . Отже, і в цьому випадку можна отримати менше зміщення. Для опису  $R_{x^* x^*}(\tau)$  можуть застосовуватися ортогональні системи функцій та інші види моделей. У системах типу БАСІ структура і параметри  $R(\tau)$  можуть вибиратися по головному показнику  $I_{qk}$ . Метод передбачає згладжування і прогнозування у точці  $\tau=0$  кореляційних функцій від сигналів  $x_i(t), x_j(t)$ . Аналізуючи дисперсії цих оцінок кореляцій, легко переконатися, що  $\sigma_{\delta_R}^2$  тим більше, чим менше довжина вибірки  $T$ .

## 6.6 Приклад побудови прогнозних моделей системою ідентифікації типу БАСІ.

Показники економіки, як функції часу, можуть мати найрізноманітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку у часі, інтервалу прогнозу та ін.

Елементи, з яких складається модель часового ряду, можуть бути аналітичними функціями часу  $t$  (степеневі;  $t^i, -\infty < i < \infty$ ; періодичні тригонометричні;  $\sin(\omega t + \varphi)$ ); комбіновані та інші функції  $f(t)$  часу або затриманими у часі  $t$  значеннями самого ряду  $y(t)$  ( $y(t-\tau), 0 \leq \tau \leq t_1$ , де  $t_1$  – кінцеве значення часу). Як правило, час  $t$  представлено дискетами  $t_k, k=0, 1, 2, \dots$  не завжди з рівномірним кроком  $\Delta t$ .

У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, побудованих на вказаних елементах, можна в «БАСІ»-системі підібрати найкращу (за основним критерієм І (критерієм точності прогнозу) структуру. Моделі з степеневими елементами, як правило, краще

використовувати для коротких рядів, а авторегресійні – для довгих (де не так сильно впливає невизначеність початкових умов).

Фізично реалізуємий показник  $I$  точності прогнозу представимо взваженою сумою часткових показників  $I_i (i = 1, 2, 3)$ , що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду. Показник  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{1}{n} \text{tr} \left[ \text{diag} \frac{\left| \hat{\beta}_i^{\text{I}} - \hat{\beta}_i^{\text{f}} \right|}{\left| \hat{\beta}_i \right|} \right], i = \overline{1, n}; \quad (6.80)$$

де  $\hat{\beta}_i^{\text{I}}, \hat{\beta}_i^{\text{H}}, \hat{\beta}_i$  оцінки  $i$ -го параметра моделі, отримані по виборці парних, непарних та всіх дискретів  $k$  часу  $t_k$ ; це, так званий, параметричний показник регулярності.

Показник  $I_2$ :

$$I_2 = (\varepsilon^T \varepsilon) \cdot (x^T x)^{-1},$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(M)], \hat{x}^T = [\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(M)]; \quad (6.81)$$

де  $\varepsilon(k)$  – похибки апроксимації сигналу  $x(k)$  відповідною моделлю в  $k$ -ій точці ряду; це, так званий, показник незміщеності, або точності моделювання ряду моделлю. Показник  $I_3$ :

$$I_3 = |1 - K|,$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^L \eta_i \left| x(M-i) \cdot \hat{x}(M-i) \right|}{\sum_{i=1}^L \eta_i \left| x(M-i) \right| \cdot \sum_{i=1}^L \eta_i \left| \hat{x}(M-i) \right|}. \quad (6.82)$$

Тут  $\eta_i$  коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу по  $L$  останнім точкам вибірки  $x(k), k = \overline{1, M}$ ;  $\sum_{i=1}^L \eta_i = 1$ ;  $\hat{x}(M-i)$  – прогнозні значення, отримані з моделі, побудованої на скороченій на  $L$  останніх точок вибірки  $k = \overline{1, M-L}$ .

Оскільки, вважається, що прогнозований ряд  $x(k)$  складається з прихованої детермінованої гладкої у часі складової і випадкової складової, близької до гаусівського шуму, то у варіаційному ряді упорядкованих по складності (мірності вектора  $\beta$ ), показник  $I_1$  збільшується в той час, як показник  $I_2$  зі зростанням  $n$  зменшується. Залежно від мети ідентифікації варіюються коефіцієнти ваги  $g_i$  взваженої суми показників:

$$I = \sum_{i=1}^3 g_i I_i, \quad \sum_{i=1}^3 g_i = 1, \quad g_i \geq 0. \quad (6.83)$$

Для задачі контролю параметрів  $\beta_i$  моделі відомої структури максимальна вага  $g_1$ ; для задачі точної апроксимації ряду  $x(k)$  моделлю  $\hat{x}(k)$  -  $g_2$ ; для задачі прогнозу -  $g_3$ . Сукупність показників  $I_1, I_2, I_3$  забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю  $\varepsilon^T$  апроксимації та точністю прогнозу.

На конкретному прикладі реального часового ряду, що має 43 дискретних  $x(k)$  з рівномірним кроком  $\Delta t = 4$  місяці (один з показників у енергетиці України), (табл.6.1), розглянемо рішення задачі прогнозу  $x(k)$ , на 6 останніх точок, вважаючи їх невідомими. Така постановка задачі дозволяє реалізувати,  $k = \overline{1,37}$ , фізично не реалізований при прогнозі в майбутнє, об'єктивний показник  $I$  відносної точності прогнозу на ці 6 точок:

$$I = \frac{[\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)] \cdot [\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)]^T}{[x(38), \dots, x(43)] \cdot [x(38), \dots, x(43)]^T}, \quad (6.84)$$

тобто відносне середньоквадратичне відхилення  $\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k)$ ,  $k = \overline{38,43}$ , прогнозованих значень  $\hat{x}(k)$  від відомих  $x(k)$ . В критерії (6.82) взято  $\eta_i = \frac{1}{L} = \frac{1}{6}$ . Коефіцієнти ваги  $g_i$  в узагальненому критерії (6.83) прийнято такими:  $g_1 = 0.9; g_2 = 0.4; g_3 = 0.4$ .

Таблиця 10.1.

**Залежність  $x(k)$  від  $k$** 

$k$	$x$	$k$	$x$	$k$	$x$	$k$	$x$
1	10550	12	13600	23	59250	34	57800
2	47070	13	14550	24	16850	35	49630
3	47350	14	49900	25	17830	36	18780
4	11500	15	56750	26	54800	37	16000
5	10900	16	16050	27	50700	38	53950
6	54700	17	14680	28	14150	39	57500
7	50000	18	59300	29	13550	40	22000
8	14320	19	57700	30	47430	41	19650
9	12900	20	15500	31	56350	42	59900
10	51650	21	13350	32	19450	43	57550
11	50740	22	55600	33	17600		

Середнє значення ряду 35100, середньо-квадратичне відхилення ряду від середнього – 19550, коефіцієнт варіації – 0.55. Наведеному у таблиці 6.1 ряду в БАСІ ставились у відповідність різні математичні моделі.

- 1) Моделі у вигляді степеневого поліному (від дискретів  $k$  часу) з цілими, дробними, додатними та від'ємними показниками степені:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k, \quad (6.85)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2, \quad (6.86)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3, \quad (6.87)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k^{\frac{1}{4}} + \beta_2 k^{\frac{1}{3}} + \beta_3 k^{\frac{1}{2}} + \beta_4 k^{\frac{3}{2}}, \quad (6.88)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^{-1} + \beta_3 k^{-3}, \quad (6.89)$$

- 2) Моделі авто регресії від  $k$  з постійним та змінним кроком:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1), \quad (6.90)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2), \quad (6.91)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3), \quad (6.92)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4), \quad (6.93)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3) + \beta_4 x(k-4), \quad (6.94)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4), \quad (6.95)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4) + \beta_3 x(k-8), \quad (6.96)$$

- 3) Комбіновані поліноміально-авторегресійні моделі, які виявила сама БАСІ, як інтелектуальна система, в процесі ідентифікації багатьох часових рядів:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1), \quad (6.97)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1), \quad (6.98)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-4), \quad (6.99)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1) + \beta_3 x(k-4). \quad (6.100)$$

На множині структур (6.85) ÷ (6.99) моделей часового ряду (таблиця 6.1) та множині методів (МНК, ІМНК, УМНК,

МОД) було перевірено ефективність використання фізично реалізуемого критерію (6.83) на предмет його близькості до фізично не реалізуемого критерію (6.85). Під ефективністю розумілася правильність вибору найкращого за фізично-нерелізуємым критерієм (6.85) методу, вибраного по фізично реалізуемому критерію (6.84). Результати числового моделювання представлено в таблиці (6.2), де в 15 рядках таблиці подано: в стовпчиках:

- 1 – типи моделей (степеневі, авторегресійні, комбіновані);
  - 2 – відносну середньо-квадратичну похибку моделювання ряду відповідною моделлю на  $k = 1,3,7$  при ідентифікації її по МНК;
  - 3 – значення фізично нереалізуемого ідеального критерію 6.85 по МНК;
  - 4 – фізично реалізуємий критерій (6.84) при ідентифікації моделі по МНК;
  - 5 – найкращий по критерію (6.84) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;
  - 6 – значення ідеального критерію (6.85) для вибраного по реальному критерію (6.84) метода для відповідної до рядка моделі;
  - 7 – значення критерію (6.84) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі;
  - 8 – найкращий за ідеальним критерієм (6.85) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі;
  - 9 – значення ідеального критерію (6.85) для найкращого за ним методу ідентифікації моделі відповідного рядка;
  - 10 – значення реального критерію (6.84) для найкращого за критерієм 6.85 метода ідентифікації моделі відповідного рядка;
  - 11 – коефіцієнт ефективності «БАСІ»-системи.
- Проаналізуємо отримані результати розрахунків:

1. На множині з 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (таблиця 6.1) найкращою по ідеальному критерію (6.85) виявилась авто регресійна модель (6.96) зі змінним запізненням на  $k-1$ ,  $k-4$  і  $k-8$  кроків; найкращий метод – МОД. За реальним критерієм (6.84) отримано той же результат (!). Взагалі, з 15 розглянутих випадків у 8-ми оптимальний метод ідентифікації по реальному критерію (6.84) було вибрано вірно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 таблиця 6.2), тобто він співпав з методом, вибраним по ідеальному але фізично-нереалізуємому критерію (6.85). В інших 7-ми випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний показник (6.95) для методу, вибраного за реальним показником (6.95) несуттєво гірший за цей показник для оптимального по ідеальному показнику методу (стовпчики 6 і 9, рисунок 6.5)

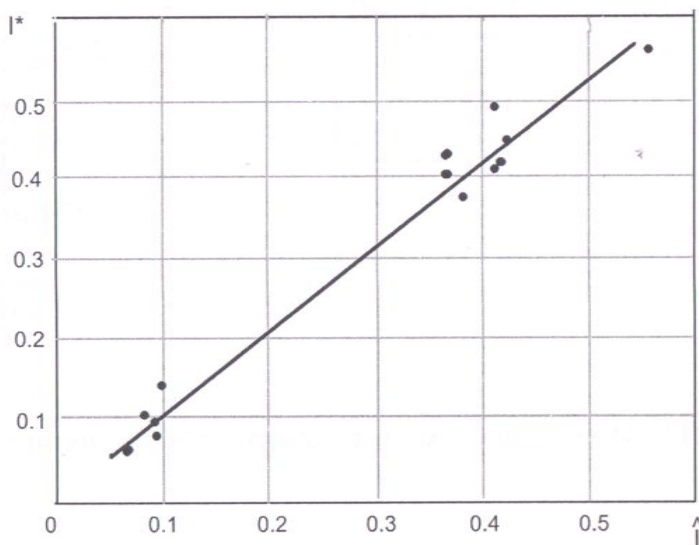


Рисунок 6.5. Залежність ідеального показника  $I^*$  (6.95) отриманого для оптимального по ньому методу ідентифікації від того ж показника для оптимального по реальному показнику  $I$  метода ідентифікації.



З рисунку 6.5 випливає висновок про сильну кореляцію показників (6.83) і (6.85) і, як наслідок, можливість ефективного використання фізично реалізуемого критерію (6.84).

2. По мірі ускладнення моделей (6.86), (6.87), (6.98), що є степеневими рядами, показник (6.81) (II стовпчик таблиці 6.2) середньо-квадратичної похибки апроксимації ряду (таблиця 6.1) моделями  $(6.85) \div (6.87)$  зменшується, що природно витікає з першої теореми Вейерштрасса про апроксимацію степеневими поліномами (рядами Тейлора). В той же час ідеальний критерій 10.85 точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1,2,3 третього стовпчика таблиці 10.2). Це підтверджує необ'єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (10.81) некоректність тільки його використання для задачі прогнозу.

3. Дещо інша ситуація має місце для авто регресійних і змішаних поліноміально-автоорегресійних моделей  $(6.90) \div (6.99)$ .

Тут, внаслідок регуляризуючої властивості МНК, якщо змінні зашумлені, внутрішній критерій (6.81) середньо-квадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (6.85), так і реальний (6.83) критерії стають достатньо сильно корельованими (рисунок 6.6).

Тобто для цього класу моделей менш критичне використання апроксимативного критерію (6.81) в задачі прогнозу в точки  $(38 \div 43)$  по зашумленим даним в точках  $(1 \div 37)$ . Тут має місце саморегуляризація: чим складніше авторегресія, тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних, а для неточних – діагональні члени матриці МНК збільшуються.

Таблиця 6.2

#### Результати моделювання

№	1	2	3	4	5
1	10,89	0,49	0,47	0,25	УМНК

2	10,90	0,484	0,59 3	0,26	ІМНК
3	10,91	0,476	0,88 3	0,41	ІМНК
4	10,92	0,485	0,59 3	0,27	УМНК
5	10,93	0,488	0,49	0,25	ІМНК
6	10,94	0,49	0,43 5	0,24	УМНК
7	10,95	0,62	0,58	0,28	УМНК
8	10,96	0,123	0,14 3	0,04	МНК
9	10,97	0,133	0,1	0,03	МНК
10	10,98	0,113	0,12 2	0,037	МДЗ
11	10,99	0,131	0,10 3	0,034	МДЗ
12	10,100	0,0087	0,09 2	0,015	МДЗ
13	10,101	0,488	0,47	0,245	МДЗ
14	10,102	0,132	0,10 8	0,035	МНК
15	10,103	0,131	0,11 1	0,036	МНК

*Продовження таблиці 6.2.*

№	6	7	8	9	10	11
1	0,41	0,242	МОД	0,363	0,26	1,3
2	0,415	0,223	ІМНК	0,415	0,223	1,43
3	0,38	0,2	ІМНК	0,38	0,2	2,32
4	0,43	0,226	ІМНК	0,365	0,235	1,62
5	0,45	0,23	УМН	0,425	0,237	1,15

			К			
6	0,42	0,235	УМН К	0,415	0,235	1,05
7	0,56	0,262	УМН К	0,558	0,262	1,04
8	0,143	0,04	МОД	0,096	0,048	1,49
9	0,1	0,03	МОД	0,088	0,126	1,13
10	0,092	0,03	МОД	0,092	0,03	1,33
11	0,091	0,031	МОД	0,091	0,031	1,13
12	0,063	0,011	МОД	0,063	0,011	1,46
13	0,489	0,225	УМН К	0,411	0,237	1,14
14	0,108	0,035	МОД	0,018 1	0,038	1,33
15	0,111	0,037	МНК	0,111	0,037	1

Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за Тихоновим) модель.

4. Зіставимо значення ідеального критерію (6.84) для моделей, отриманих по МНК (стовпчик 3) і одному з запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією по реальному критерію (6.83). З 15 моделей тільки для моделі (6.97) показник (6.85) несуттєво менший. Тобто тільки тут за критерієм (6.84) помилково замість МНК було вибрано МОД. В інших чотирнадцяти випадках метод, знайдений за умови мінімуму фізично реалізованого критерію (6.84) точності прогнозу, дав кращі результати, ніж МНК, або такі ж, якщо по (6.84) вибирався, як кращий, МНК (див. стовпчики 6 і 3 таблиці 6.2).

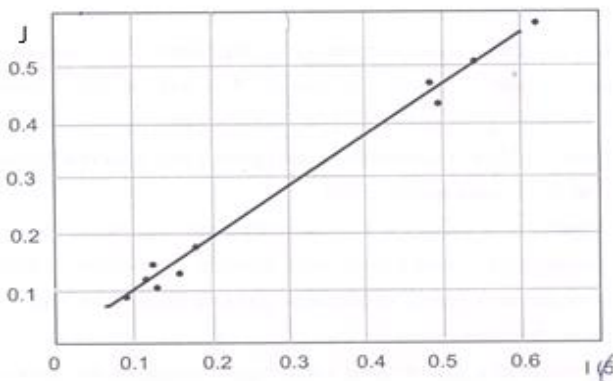


Рисунок 6.6. Регресійна залежність  $J$  (6.81) від  $I$  (6.84)

5. В межах одного методу ідентифікації, наприклад, МОД (стовпчик 6, рядки 10÷ 13) розкид ідеального критерію (6.85) залежно від структури моделі складає від 0,063 до 0,489, що підтверджує актуальність вибору структури моделі.

В межах однієї, наприклад, оптимальної за критерієм (10.95) моделі (10.107), оптимізація рішення на множині з чотирьох методів (МНК, МОД, УМНК, ІМНК) дає вииграш в 1,5 рази (0,092 – для МНК і 0,063 – для МОД, як оптимального методу).

2. В цілому оптимізація на множині методів і моделей дає суттєвий вииграш у точності прогнозу. Визначимо цей вииграш, як відношення критерію (6.85) для моделі з коефіцієнтами, визначеними по МНК (стовпчик 3, таблиця 6.2) до значення того ж критерію для тієї ж моделі, з коефіцієнтами, визначеними оптимальним по (6.85) методом (стовпчик 9, таблиця 6.2). В стовпчику 11 таблиці 6.2 подано це відношення, що лежить у межах від 1 до 2,32. В середньому воно становить 1,33. Загальний і очевидний висновок – рекомендація: Якщо ви маєте декілька методів ідентифікації і можливість використання моделей, то пошук найкращої за основним показником і пари «модель-метод» в

умовах невизначеності дає можливість краще вирішити задачу ідентифікації.

*Контрольні запитання:*

- 1) Сформулювати задачу оцінювання параметричної лінійної моделі.
- 2) Навести алгоритм МНК у ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів.
- 3) Навести алгоритм узагальненого МНК.
- 4) Навести алгоритм інтегрованого МНК.
- 5) Навести алгоритм рекурентного МНК.
- 6) Визначити поняття вагової функції інтегрованого МНК.
- 7) Навести алгоритм методу одноразового ділення.
- 8) Навести алгоритм методу прогнозу кореляції.
- 9) Навести приклад побудови прогнозних моделей.

*Література до розділу*

1. Тихонов А.Н., Арсенина В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979
2. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984
3. Виленкин С.Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций М.: Энергия, 1979
4. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 200 с.
5. Иваненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. К.: Техніка, 1975.

## Розділ 7. Дискретні моделі динамічних систем та їх ідентифікація

### 7.1 Загальні положення

#### 7.1.1.Решітчасті функції та скінченні різниці

Нехай  $f(t)$ - неперервна функція часу  $t$ . Виберемо інтервал дискретності  $T$  і визначимо значення функції  $f(t)$  лише для значень аргументу  $t$  кратних  $T$ .Тоді отримаємо «решітчасту» функцію  $f[kT]$  дискретного аргументу  $kT(k=0,1,2,...)$ . Для вибраного інтервалу дискретності  $T$  решітчаста функція  $f[kT]$  стає функцією аргументу  $k:f[k]$ . Коефіцієнти у функціях  $f[k]$  і  $f[kT]$ збігаються, якщо для відтворення породжуючої їх неперервної функції  $f(t)$ порядковий номер  $k$  помножити на  $T$ .Різницю

$$f[kT] = f[(k+1)T] - f[kT], \quad k=0,1,2,..., \quad (7.1)$$

називають *прямою* скінченою різницею першого порядку решітчастої функції  $f[kT]$ .Визначимо пряму скінченну різницю другого порядку

$$\Delta^2 f[kT] = \Delta f[(k+1)T] - \Delta f[kT], \quad k=0,1,2,... \quad (7.2)$$

У вираз (4.2) підставимо значення  $\Delta f[kT]$  та  $\Delta f[(k+1)T]$ , тоді

$$\Delta^2 f[kT] = f[(k+2)T] - 2f[(k+1)T] + f[kT], \quad K=0,1,2,... \quad (4.3)$$

Узагальнюючи (7.1) та (7.2) отримаємо:

$$\Delta^n f[kT] = \Delta f^{n-1}[(k+1)T] - \Delta f^{n-1}[kT], \quad n=1,2,...; k=0,1,2,..., \quad (7.4)$$

де

$$\Delta^0 f[kT] = f[kT], \quad \Delta^0 f[(k-1)T] = f[(k-1)T]. \quad (7.5)$$

Окрім прямої різниці  $\Delta f[kT]$  вводять *обернену*:

$$\nabla f[kT] = f[kT] - f[(k-1)T], \quad k=0,1,2,... \quad (7.6)$$

За аналогією з (7.4) визначається обернена різниця  $\nabla^n f[kT]$  порядку  $n$ :

$$\nabla^n f[kT] = \nabla f^{n-1}[kT] - \nabla^{n-1} f[(k-1)T], \quad n=1,2,\dots; \quad k=1,2,\dots, \quad (7.7)$$

$$\begin{cases} \nabla^0 f[kT] = f[kT], \\ \nabla^0 f[(k-1)T] = f[(k-1)T]. \end{cases} \quad (7.8)$$

Вираз (7.7) для  $n=2$  :

$$\nabla^2 f[kT] = \nabla f[kT] - \nabla f[(k-1)T], \quad k=2,3,4,\dots, \quad (7.9)$$

або, з урахуванням (7.4),

$$\nabla^2 f[kT] = f[kT] - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T], \quad k=2,3,4,\dots \quad (7.10)$$

Різницеві рівняння для решітчастих функцій  $x[kT]$  та  $y[kT]$  можна побудувати в скінчених різницях  $\Delta^l y[kT]$  ( $l=0,1,2,\dots,n$ ),  $\Delta^q x[kT]$  ( $q=0,1,2,\dots,m$ ) або  $\nabla^l y[kT]$  ( $l=0,1,2,\dots,n$ ),  $\nabla^q x[kT]$  ( $q=0,1,2,\dots,m$ ), які будуть аналогом диференціальних рівнянь.

### **Приклад 7.1**

Диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 2y = 2x \quad (7.11)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (7.12)$$

Аргументи  $t_k$  і  $kT$  пов'язано співвідношенням

$$t_k = kT. \quad (7.13)$$

Дискретний аналог першої похідної  $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{\Delta y[kT]}{\Delta t_k} = \frac{\Delta y[kT]}{(k+1)T - kT} = \frac{\Delta y[kT]}{T}, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (7.14)$$

другої похідної

$$\frac{\Delta^2 y[kT]}{(\Delta t_k)^2} = \frac{\Delta^2 y[kT]}{T^2}, k=0,1,2,\dots \quad (7.15)$$

Підставимо вирази (7.14), (7.15) у неперервне рівняння (7.11)

$$\frac{\Delta^2 y[kT]}{T^2} + 4 \frac{\Delta y[kT]}{T} + 2y[kT] = 2x[kT], k=0,1,2,\dots, (7.16)$$

$$\begin{cases} y[0]=0, \\ \frac{\Delta y[0]}{T}=1. \end{cases} \quad (7.17)$$

Помноживши (4.16) на  $T^2$ , отримаємо:

$$\Delta^2 y[kT] + 4T\Delta y[kT] + 2^2 y[kT] = 2^2 x[kT], K=0,1,2,\dots, (7.18)$$

$$\begin{cases} \Delta x[0]=0, \\ \Delta y[0]=T. \end{cases} \quad (7.19)$$

Підставимо у рівняння (7.18) замість скінчених різниць  $\Delta y[kT]$ , їхні значення (7.1), (7.2):

$$\begin{aligned} y[(k+2)T] - 2y[(k+1)T] + y[kT] + 4T(y[(k+1)T] - y[kT]) + \\ + 2T^2 y[kT] = 2T^2 x[kT], K = 0,1,2,\dots, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{cases} y[0]=0, \\ y[1 \cdot T] - y[0] = T \end{cases} \quad (7.21)$$

або

$$\begin{aligned} y[(k+2)T] = 2T^2 x[kT] - (4T-2)y[(k+1)T] - (2T^2 - 4T + 1)y[kT], \\ k=0,1,2,\dots, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{cases} y[0]=0, \\ y[1 \cdot T] = T \end{cases} \quad (7.23)$$



Поклавши у рівнянні (7.22)  $k=0,1,2,\dots$  і так далі отримаємо його розв'язок  $y=[kT]$ , починаючи з (7.23).

### 7.1.2. Перетворення Лапласа решітчатих функцій та Z-перетворення

Решітчаста функція  $y[kT]$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) породжена неперервною функцією-оригіналом  $y(t)$  з періодом дискретності  $T$ . Для  $y(t)$  існує перетворення Лапласа:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt, \quad (7.24)$$

$$y(t) = \begin{cases} y(t) & , t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (7.25)$$

Інтеграл (4.24) з похибкою, яка зменшується із зменшенням значення  $T$ , запишемо сумою:

$$Y(p) \cong \sum_{k=0}^{\infty} y(t_k) e^{-pt_k} T,$$

або

$$Y(p) \cong T \sum_{k=0}^{\infty} y[kT] e^{-p k T}. \quad (7.26)$$

Введемо комплексну змінну  $q$ :

$$q = pT, \quad (7.27)$$

і запишемо суму, яка стоїть у правій частині (4.26):

$$Y^*(q) = \sum_{k=0}^{\infty} y[kT] e^{-qk}. \quad (7.28)$$

Це дискретне перетворення Лапласа  $Y(q)$  решітчастої функції  $y[kT]$ .

**Приклад 7.2** Зображення за Лапасом експоненціальної функції  $f(t) = e^{(-\alpha t)}$  є функція

$$f(p) = \frac{1}{p+a}. \quad (7.29)$$

Зображення за Лапласом решітчастого аналога експоненти

$$f[kT] = e^{(-\alpha kT)} \quad (7.30)$$

за формулою (7.28):

$$\begin{aligned} F(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] e^{-qk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} * e^{-qk} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha T + q)k} = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha T + q)}} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} \cdot e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - e^{-\alpha T}}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Z-перетворення досягається шляхом заміни у формулі (7.28)  $e^a$  на Z:

$$Z\{y[kT]\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[kT] z^{-k}. \quad (7.32)$$

Знайдемо Z-перетворення решітчастої експоненти (7.30), підставивши в (7.31)  $z = e^a$ :

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}. \quad (7.33)$$

Z- зображення зсунутих значень решітчастих функцій.

Зсув вправо:

$$Z\{y[(k+1)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k+1)T] z^{-k}. \quad (7.34)$$

Покладемо  $k+1 = m$ . Тоді:

$$\begin{aligned} Z\{y[k+1]T\} &= \sum_{m=1}^{\infty} y[mT] z^{-(m-1)} = z \cdot \sum_{m=1}^{\infty} y[mT] z^{-m} = \\ &= z \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} y[mT] z^{-m} - y[0] \right) = z \cdot (Y(z) - y[0]). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Аналогічно:

$$Z\{y[(k+2)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k+2)T] z^{-k}. \quad (7.36)$$

Покладемо  $m = k + 2$ . Тоді:

$$\begin{aligned} Z\{y[(k+2)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} y[mT] z^{-(m-2)} = \\ &= z^2 \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} y[mT] - y[0] - y[1 \cdot T] z^{-1} \right) = \\ &= z^2 \cdot (Y(z) - y[0] - y[1 \cdot T] z^{-1}). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Узагальнюючи (7.35) та (7.37) для довільного  $n$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} Z\{y[(k+n)T]\} &= z^n \cdot (Y(z) - y[0] - y[1 \cdot T] z^{-1} - \dots \\ &\quad - y[(n-1)T] z^{-(n-1)}). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Зсув вліво:

$$Zy[(k-1)T] = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k-1)T] z^{-k}. \quad (7.39)$$

Покладемо  $k - 1 = m$ . Тоді:

$$\begin{aligned} Z\{y[(k-1)T]\} &= \sum_{m=-1}^{\infty} y[mT] z^{-(m+1)} = \\ &= z^{-1} \cdot \left( y[-1 \cdot T] \cdot z + \sum_{m=0}^{\infty} y[mT] z^{-m} \right) = z^{-1} \cdot (0 + Y(z)) = \\ &= z^{-1} \cdot Y(z), \end{aligned} \quad (7.40)$$

де оригінал дорівнює нулю за від'ємних значеннях аргументу.

Аналогічно:

$$Z\{y[(k-2)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k-2)T] z^{-k}. \quad (7.41)$$

Покладемо  $k - 2 = m$ . Тоді:

$$\begin{aligned}
Z\{y[(k-2)T]\} &= \sum_{m=-2}^{\infty} y[mT]z^{-(m+2)} = \\
&= \left( y[-2 \cdot T] \cdot z^2 + y[-1 \cdot T] \cdot z^1 + \sum_{m=0}^{\infty} y[mT]z^{-m} \right) = \\
&= z^{-2} \cdot (0 + 0 + Y(0)) = z^{-2} \cdot Y(z).
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Для довільного  $n$  отримаємо:

$$Z\{y[(k-n)T]\} = z^{-n} \cdot Y(z). \tag{7.43}$$

Аналізуючи (7.38) і (7.43) можна відзначити, що за допомогою  $Z$ -перетворення (7.43) доцільніше розв'язувати різницеві рівняння, які мають зсув вліво. Якщо ж різницеве рівняння зі зсувом вправо, його доцільніше розв'язувати рекурентною процедурою (7.22).

**Приклад 7.3** Дискретна модель системи має вигляд:

$$\begin{aligned}
&y[kT] + 2y[(k-1)T] + 4y[(k-2)T] = \\
&= 2x[kT] - x[(k-1)T],
\end{aligned} \tag{7.44}$$

$$\begin{cases} y[-1 \cdot T] = 0, \\ y[-2 \cdot T] = 0. \end{cases} \tag{7.45}$$

Її  $z$ -перетворення:

$$\begin{aligned}
&Z\{y[kT] + 2y[(k-1)T] + 4y[(k-2)T]\} = \\
&= Z\{2x[kT] - x[(k-1)T]\}.
\end{aligned}$$

Враховуючи лінійність  $Z$ -перетворення, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&Z\{y[kT]\} + 2Z\{y[(k-1)T]\} + 4Z\{y[(k-2)T]\} = \\
&= 2Z\{x[kT]\} - Z\{x[(k-1)T]\}.
\end{aligned}$$

З урахуванням (7.32), (7.40), (7.43) маємо:

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + 4z^{-2}Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z)$$

або

$$Y(z) = W(z)X(z), \quad (7.46)$$

де

$$W(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}} \quad (7.47)$$

дискретна передаточна функція системи, що описується різницеvim рівнянням (7.44).

Якщо  $x[kT] = 1[kT]$ , то з функції (7.33) для  $\alpha = 0$ , отримаємо  $z$ -зображення одиничної функції:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (7.48)$$

$Z$ -перетворення реакції системи (7.44) на одиничну сходінку  $1(kT)$ :

$$Y(z) = \frac{2 - z^{-1}}{(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}) \cdot (1 - z^{-1})} = \frac{2 - z^{-1}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3}}. \quad (7.49)$$

Існує ряд алгоритмів знаходження решітчастих оригіналів за їх  $Z$ -зображенням. Найпростіший полягає у діленні полінома на поліном.

Якщо розписати суму у формулі  $Z$ -перетворення в (7.32), то видно, що коефіцієнти при степенях  $z^{-k}$  ( $k=0,1,\dots$ ) є значеннями решітчастої функції  $y[kT]$  оригінала  $Z$ -зображення  $Y(z)$ .

## **7.2. Математична модель системи з мікропроцесором в контурі управління**

### **7.2.1. Мікропроцесор, як дискретна система**

На вході мікропроцесора неперервні сигнали перетворюються в комбінації імпульсів *аналого-цифровим перетворювачем* (АЦП), на виході комбінації імпульсів перетворюються в кусково-неперервний сигнал *цифро-аналоговим перетворювачем* (ЦАП).

АЦП складається з двох блоків. Перший (ключ) перетворює неперервний сигнал  $y(t)$  у послідовність імпульсів

$y_i, y_i = y[iT], i = 0, 1, 2, \dots (7.50)$ . Другий (кодер (КД)) імпульсу  $y_i$  ставить у відповідність пачку імпульсів однакової амплітуди, кількість  $n$  яких у пачці залежить від значення амплітуди імпульсу  $y_i, n = n(y_i)$ .

З імпульсами однакової амплітуди працює мікропроцесор. В результаті виконання мікропроцесором заданих операцій на його виході з'являються комбінації інших пачок імпульсів, які надходять на вхід ЦАП, який складається з трьох функціональних блоків. Перший (декодер (ДК)) кожній пачці з « $m$ » імпульсів однакової амплітуди ставить у відповідність один імпульс  $x_i$ , амплітуда якого відображає кількість « $m$ » імпульсів у пачці,  $x_i = x_i(m)$ . Другий (фіксатор (ФК)) запам'ятовує амплітуду  $x_i$  імпульсу з ДК на весь період  $T$ , перетворюючи послідовність імпульсів  $x_i$  у кусково-сталу функцію  $\bar{x}_i$ :

$$\bar{x}_i(t) = x[iT] \cdot \{1(t - iT) - 1(t - [i + 1]T)\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

де  $1\{t\}$ - одинична функція Хевісайта. Третій (фільтр (Ф)) згладжує кусково-сталу функцію  $\bar{x}_i$  і перетворює її в неперервну функцію  $x(t)$ .

Мікропроцесор протягом відрізка часу  $\tau$  виконує задану програму, завдяки якій  $y(t)$  перетворюється у функцію  $x(t)$  з заданими характеристиками.

Наприклад, мікропроцесор формує сигнал  $x(t)$  пропорційний  $y(t)$  та її першій похідній  $\dot{y}(t)$ , виконуючи функцію пропорційно-диференційного (ПД)- регулятора:

$$x(t) = c_1 \frac{dy(t)}{dt} + c_0 y(t). \quad (7.51)$$

Мікропроцесору для реалізації залежності (7.51) потрібен час  $\tau$ , протягом якого він отримує результат. Тому вираз (7.51) потрібно доповнити рівнянням блоку затримки сигналу на час  $\tau$ :

$$x_{\text{из}}(t) = x(t - \tau) \cdot 1(t - \tau). \quad (7.52)$$

Від диференціального рівняння (7.51) слід перейти до рівняння в скінчених різницях. Використаємо для перетворення

диференціального рівняння (7.51) процедуру, викладену в співвідношеннях (7.11) – (7.19) для прямих скінчених різниць:

$$\begin{aligned} x[kT] &= c_1 \frac{\nabla y}{T} + c_0 y[kT] = \\ &= \frac{c_1}{T} (y[kT] - y[(k-1)T]) + c_0 y[kT] = \\ &= \left( \frac{c_1}{T} + c_0 \right) y[kT] - \left( \frac{c_1}{T} \right) y[(k-1)T]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Якщо покласти

$$\tau = lT, \quad (7.54)$$

де  $l$  – ціле число, то в якості дискретного аналога блока затримки (7.52) матимемо:

$$x_{лз}[kT] = [(k-l)T] \cdot 1[(k-l)T]. \quad (7.55)$$

### 7.2.2. Системи «об'єктно-цифровий регулятор»

Мікропроцесорний (МП) регулятор реалізує закон регулювання (7.51) лінійним динамічним об'єктом (ЛДО) (Рис. 7.2).

Нехай передаточна функція  $W(p)$  об'єкта має вигляд

$$W(p) = \frac{2p+1}{p^2+5p+6}. \quad (7.56)$$

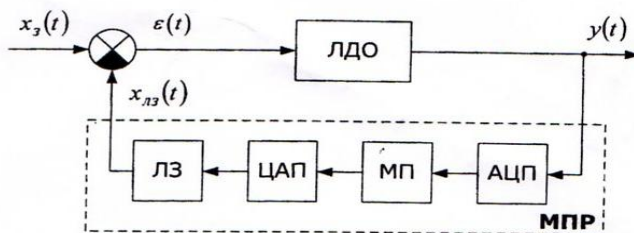


Рис. 7.2. Функціональна схема мікропроцесорної системи управління об'єктом

Рівнянню об'єкту у змінних Лапласа

$$(p^2 + 5p + 6)Y(p) = (2p + 1)X(p) \quad (7.57)$$

відповідає диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y(t) = 2 \frac{dx}{dt} + x(t), \quad (7.58)$$

якому, у свою чергу, відповідає рівняння в кінцевих обернених різницях

$$\frac{\nabla^2 y}{T^2} + 5 \frac{\nabla y}{T} + 6y[kT] = 2 \frac{\nabla x}{T} + x[kT], \quad (7.59)$$

де  $T$  – період, з яким ключ АЦП із неперервної функції  $y(t)$  формує решітчасту  $y[kT]$ , а декодер в ЦАП із пачок імпульсів, що поступають з мікропроцесора, формує решітчасту функцію  $x[kT]$ .

Розписавши в рівнянні (7.59) обернені різниці через значення решітчастої функції та упорядкувавши їх, отримаємо дискретну математичну модель системи

$$\begin{aligned} (1 + 5T + 6T^2)y[kT] - (2 + 5T)y[(k-1)T] + y[(k-2)T] = \\ = (1 + 2T)x[kT] - 2Tx[(k-1)T]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Рівняння (7.53), (7.55) задають дискретну математичну модель мікропроцесорного регулятора цієї системи, ввімкненого в контур зворотного зв'язку. Для побудови моделі замкненої системи необхідно систему різницевих рівнянь (7.60), (7.59), (7.55) доповнити рівняння компаратора, який має два входи – один для заданого сигналу  $x_3(t)$ , другий для сигналу  $x_{ЛЗ}(t)$  зворотного зв'язку з мікропроцесорного регулятора, та вихід, з якого на об'єкт управління подається сигнал відхилення  $\varepsilon(t)$ ,

$$\varepsilon[kT] = x_3[kT] - x_3[kT]k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.61)$$

Для математичної моделі замкненої дискретної системи, заданої рівняннями (7.53), (7.55), (7.60), (7.61) необхідно у правій частині



рівняння (7.60) замість  $x[kT], x[(k-1)T]$  підставити  $\varepsilon[kT], \varepsilon[(k-1)T]$ .

Щоб отримати модель цієї ж дискретної системи на комплексній площині здійснимо  $z$  – *перетворення* різницевих рівнянь (7.53), (7.55), (7.60), (7.61). Перетворюючи (7.53), отримаємо:

$$X(z) = \left( \frac{c_1}{T} + c_0 \right) Y(z) - \frac{c_1}{T} z^{-1} Y(z) \quad (7.62)$$

або

$$X(z) = W_{mn}(z) \cdot Y(z), \quad (7.63)$$

де

$$W_{mn}(z) = \left[ \left( \frac{c_1}{T} + c_0 \right) - \left( \frac{c_1}{T} \right) z^{-1} \right] \quad (7.64)$$

- дискретна передаточна функція мікропроцесора МП.  
Перетворюючи (7.55) отримаємо:

$$X_{лз}(z) = z^{-1} X(z), \quad (7.65)$$

або

$$X_{лз}(z) = W_{лз}(z) \cdot X(z), \quad (7.66)$$

де

$$W_{лз}(z) = z^{-1} \quad (7.67)$$

— дискретна передаточна функція лінії затримки (ЛЗ).  
Перетворюючи (7.60) отримаємо:

$$\begin{aligned} & (1 + 5T + 6T^2) Y(z) - \\ & - (2 + 5T) z^{-1} Y(z) + z^{-2} Y(z) = (1 + 2T) E(z) - 2T z^{-1} E(z). \end{aligned} \quad (7.68)$$

або

$$Y(z) = W(z) \cdot E(z), \quad (7.69)$$

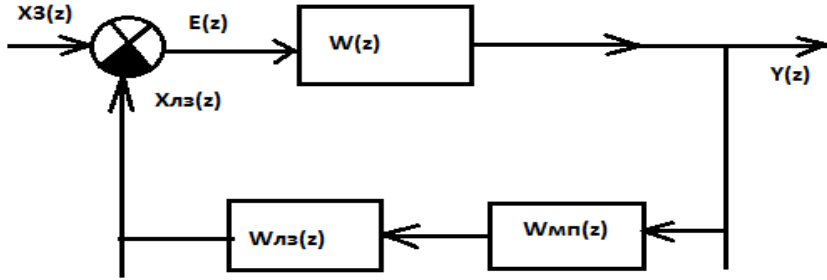


Рис. 7.3. Структурна схема системи

де

$$W(z) = \frac{(1 + 2T) - 2Tz^{-1}}{(1 + 5T + 6T^2) - (2 + 5T)z^{-1} + z^{-2}} \quad (7.70)$$

— дискретна передаточна функція об'єкта управління (7.56).

Перетворюючи (7.61) отримаємо:

$$E(z) = X_3 - X_{GP}(z), \quad (7.71)$$

Передаточні функції (7.64), (7.60), (7.70) об'єднано у структурну схему (Рис. 7.3)

З урахуванням (7.71), відображення задаючого впливу  $X_3(z)$  в вихідну змінну  $Y(z)$  набуває вигляду,

$$Y(z) \frac{W(z)}{1 + W(z)W_{mn}(z) \cdot W_{ln}(z)} X_3(z) \quad (7.72)$$

де

$$\frac{W(z)}{1 + W(z)W_{mn}(z) \cdot W_{ln}(z)} = W_3(z) \quad (7.73)$$

-дискретна передаточна функція замкненої системи.

Підставляючи в (4.73) вирази для відповідних функцій та виконуючи необхідні перетворення отримаємо:

$$W_z(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-1} + a_4 z^{-(1+l)} + a_5 z^{-(2+l)}} \quad (7.74)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 + 2T, \\ b_1 = -2T, \\ a_0 = 1 + 5T + 6T^2, \\ a^1 = -(2 + 5T), \\ a^2 = 1, \\ a_3 = (1 + 2T) \cdot \left( \frac{c_1}{T} + c_0 \right), \\ a_4 = -\left( 2T \cdot \frac{c_1}{T} + c_0 \right) + (1 + 2T) \cdot \left( \frac{c_1}{T} \right), \\ a_5 = 2T \cdot \frac{c_1}{T}. \end{array} \right. \quad (7.75)$$

### 7.3 Дискретні стохастичні моделі

При аналізі стохастичних систем реалізації випадкового процесу обробляються і видаються у вигляді часового ряду. Часовий ряд містить ординати реалізації випадкового процесу зняті в дискретні рівновіддалені моменти часу. Про властивості вихідної неперервної системи судять за результатами цифрової обробки сигналів (часових рядів), сформованих системою. У зв'язку з цим широке розповсюдження отримали цифрові параметричні стохастичні моделі авторегресії і ковзного середнього (АРКС-моделі). Вони досить прості і включають зазвичай невелике число параметрів, які необхідно

оцінювати за спостереженнями. АРСР-моделі можуть бути використані для вивчення часових рядів та визначення статистичних характеристик цих рядів. Такі моделі широко використовуються в управлінні, економіці, медицині, геофізиці, при обробці звукових сигналів і т.і.

АРСР порядку  $(p, q)$  називається ряд

$$y(k) = \sum_{i=1}^p c_i y(k-i) + \sum_{j=1}^q d_j e(k-j) + e(k), \quad (7.76)$$

де  $y(k)$  - значення часового ряду в  $k$ -й момент часу;  $e(k)$  послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією (білий шум);  $\{c_i, i=1, p\}$ - параметри авторегресії;  $\{d_j, j=1, q\}$ - параметри моделі шуму. Частковими випадками АРСР  $(p, q)$  процесів є процес  $AP(p)$  - авторегресії порядку  $p$ :

$$y(k) = \sum_{i=1}^p c_i y(k-i) + e(k) \quad (7.77)$$

і процес  $CC(q)$  - ковзного середнього порядку  $q$

$$y(k) = \sum_{j=1}^q d_j e(k-j) + e(k).$$

Рівняння (7.76) і (7.77) описують рекурсивні, а рівняння (7.78) - трансверсальні фільтри. Таким чином, процеси АРСР  $(p, q)$ , АП  $(p)$  і СС  $(q)$  можна розглядати як відгуки відповідних лінійних фільтрів на вхідних білий шум  $\{e(t_k)\}$ .

Отже, умовами стаціонарності цих процесів є умови стійкості відповідних фільтрів: рекурсивний фільтр стійкий, якщо всі корені його характеристичного рівняння

$$q^p - c_1 q^{p-1} \dots - c_p = 0 \quad (7.78)$$

знаходяться всередині кола одиничного радіусу. Трансверсальний фільтр порядку  $q$  стійкий без обмеження на параметри.

Якщо в якості стохастичної системи розглядається одномірний об'єкт управління, то АРСР-модель об'єкта прийме вигляд:

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(k-j) + e(k), \quad (7.79)$$

де  $y(k)$ ,  $u(k)$  вихідна і вхідна координати об'єкту.

Аналогічно (7.76) запишеться АР-модель

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + bu(k) + e(k), \quad (7.80)$$

а також СС-модель

$$y(k) = \sum_{i=1}^p bu(k-i) + e(k). \quad (7.81)$$

Рівняння (7.79) - (7.81) є лінійними різницевиими рівняннями об'єкта ідентифікації.

Використовуючи  $z$  - перетворення їх можна записати у символічній формі.

АРСС – модель

$$A(z)y(z) = B(z)u(z) + e(z), \quad (7.82)$$

АР– модель

$$A(z)y(z) = Bu(z) + e(z), \quad (7.83)$$

СС – модель

$$y(z) = B(z)u(z) + e(z), \quad (7.84)$$

де  $y(z)$ ,  $u(z)$  і  $e(z)$  – зображення відповідних сигналів;

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}, \quad B(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{-j}. \quad (7.85)$$

Дискретна передаточна функція об'єкта, як відношення - зображень сигналу на виході до сигналу на вході за нульових початкових умов:

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (7.86)$$

За наявності запізнювання  $\tau$  в об'єкті рівному цілому числу  $d$  періодів дискретизації, вираз для дискретної передаточної функції необхідно помножити на  $z^{-d}$ :

$$W_d(z) = W(z) z^{-d} = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d}.$$

Для шуму (за аналогією) передаточна функція буде мати вигляд:

$$W_f(z) = \frac{f(z)}{e(z)} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + \dots + d_s z^{-s}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_r z^{-r}} = \frac{D(z)}{C(z)}. \quad (7.87)$$

Об'єднавши виразу (7.86) і (7.87), отримаємо модель об'єкта з шумом вимірів:

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{D(z)}{C(z)} e(z). \quad (7.88)$$

Залежно від типу моделі шуму, за якого гарантується збіжність оцінок моделі (4.88) використовуються різні методи ідентифікації:

- для МП-метода (метода максимальної правдоподібності)

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{D(z)}{A(z)} e(z); \quad (7.89)$$

- для МНК-метода (метода найменших квадратів)

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{1}{A(z)} e(z). \quad (7.90)$$

Перехід від безперервної моделі до дискретної і, навпаки, від дискретної до неперервної задається за допомогою перетворень

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}, \quad (7.91)$$

і навпаки

$$W(p) = p^{z-1} \left\{ \frac{z}{z-1} W(z) \right\}. \quad (7.92)$$

Співмножник  $\frac{z-1}{z}$  вказує на наявність у дискретній системі екстраполятора нульового порядку, який фіксує сигнал на виході дискретного елемента між моментами квантування. У тому випадку, якщо об'єкт управління багатовимірний і має математичну модель задану в просторі станів, то остання зводиться до дискретної моделі виду

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k), \quad y(k) = Cx(k), \quad (7.93)$$

де параметри (матриці) дискретної системи пов'язано з параметрами (матрицями) вихідної безперервної системи виразами

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{AT} B ds, \quad (7.94)$$

де  $T$  – інтеграл квантування.

**Приклад 7.4** Необхідно знайти дискретну модель об'єкту, рівняння стану якого мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + u, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1, \\ y = x_2. \end{cases} \quad (7.95)$$

Для обчислення матричної експоненти (7.94) знайдемо її перетворення Лапласа

$$L[e^{AT}] = (pI - A)^{-1} \quad (7.96)$$

$I$  – одинична матриця.

Після підстановки в (7.96) матриці  $A$  отримаємо

$$(pI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p \end{pmatrix}^{-1}. \quad (7.97)$$

Зворотня матриця

$$\begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p(p+1)} \begin{pmatrix} p & 0 \\ p & p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(p+1)} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{pmatrix}. \quad (7.98)$$

Звідси, знайдемо матрицю переходу до дискретної системи  $A_d$ :

$$A_d = e^{AT} = Z \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{(p+1)} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.99)$$

де  $T$  – інтервал дискретизації часу.

Матриця  $B_d$  відповідно до (7.94) буде дорівнювати

$$B_d = \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 1 - e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{pmatrix}. \quad (7.100)$$

Дискретний аналог моделі (7.95) виконавчого механізму:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= e^{-T} x_1(k) + (1 - e^{-T}) u(k) = \\ &= a_{11} x_1(k) + b_1 u(k) x_2(k+1) = \\ &= (1 - e^{-T}) x_1(k) + x_2(k) + (T - 1 + e^{-T}) u(k) = \\ &= a_{21} x_2(k) + b_2 u(k). \end{aligned}$$

## 7.4. Математичні моделі на базі матричних операторів

### 7.4.1. Лінійні системи

Для дослідження нестационарних систем використання диференціальних рівнянь стає громіздким. Тому виникла ідея створення методів, що використовують апарат матричних



операторів і спектральну форму опису процесів. Апарат матричних операторів базується на використанні теорії ортогональних функцій і використовує як базис не тільки тригонометричні, але й інші види ортогональних функцій, які утворюють нові базиси. В якості таких функцій використовують поліноми Лежандра, Чебишева, Лагерра, функції Уолша та ін.

Метод матричних операторів і спектральні методи передбачають розкладання сигналів і часових динамічних характеристик системи по ортогональним базисам. Нехай  $\Phi[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]^T$  одностовбчикова матриця з елементів ортонормованого базису породжує в загальному випадку деякий Банахів простір функцій. Тоді довільний сигнал системи  $x(t)$  заданий на відрізку  $[t_0, t_1]$  можна наблизити за допомогою розкладання

$$x(t) = \Phi^T(t) C^x, \quad (7.101)$$

де  $C^x = [c_1^x, c_2^x, \dots, c_n^x]$  коефіцієнти розкладання  $x(t)$  по базисних функціях (необов'язково тригонометричним). У термінах спектральних методів  $C^x = [c_1^x, c_2^x, \dots, c_n^x]$  представляє сукупність коефіцієнтів Фур'є вихідного сигналу  $x(t)$  щодо обраної ортонормованої системи функцій  $\Phi(t)$ . Застосування спектральної форми опису сигналів дозволяє перейти від дослідження самих сигналів до розгляду їх спектральних характеристик щодо обраного базису. Обраний базис утворює простір станів системи, в якому її вхідний і вихідний сигнали будуть відповідно векторами  $C^x = [c_1^x, c_2^x, \dots, c_n^x]$  та  $C^y = [c_1^y, c_2^y, \dots, c_n^y]$ . Без порушення спільності міркувань можна покласти  $m=n$ . Тоді в просторі станів, який визначається вибраним ортонормальним базисом, система здійснює відображення вхідного вектора у вихідний за допомогою оператора  $A$

$$C^y = A C^x. \quad (7.102)$$

Цей оператор називається матричним оператором або спектральною характеристикою системи щодо ортонормованого базису.

Визначимо оператор  $A$  через параметри системи, яку задають диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=1}^m b_k(t) \frac{d^k x}{dt^k}. \quad (7.103)$$

Інтегруючи  $n$  - раз вихідне рівняння системи і здійснюючи подальше інтегрування по частинах з урахуванням нульових початкових умов отримаємо інтегральне рівняння Вольтера 2-го роду:

$$y(t) + \int_0^t \bar{h}_y(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t), \quad (7.104)$$

де

$$\bar{h}_y(t, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k d^k}{(n-1)! d\tau k} [a_k(\tau)(t-\tau)^{n-1}], \quad (7.105)$$

$$f(t) = \int_0^t \bar{h}_x(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (7.106)$$

$$\bar{h}_x(t, \tau) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k d^k}{(n-1)! d\tau k} [b_k(\tau)(t-\tau)^{n-1}], \quad (7.107)$$

$$h(t, \tau) = \begin{cases} \bar{h}(t, \tau), & 0 \leq \tau \leq t \\ 0, & 0 \leq \tau \leq T \end{cases}, \quad (7.108)$$

Функції  $h(t, \tau)$  називаються ядрами інтегрального рівняння.

Представляючи змінні інтегрального рівняння в ортономіруючій базисі, отримаємо

$$x(t) = \Phi^T(t) C^x, y(t) = \Phi^T(t) C^y, \quad (7.109)$$

$$h_x(t, \tau) = \hat{O}^T(t) A^x \hat{O}(\tau), \quad h_y(t, \tau) = \hat{O}^T(t) A_0^y \hat{O}(\tau), \quad (7.110)$$

де

$$c_i^x = \int_0^T x(t) \phi_i(t) dt, c_i^y = \int_0^T x(t) \phi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$A^x = \left( \iint_T k_x(t, \tau) \phi_i(t) \phi_j(\tau) dt d\tau \right)_{i, j=1}^k,$$

$$A_0^y = \left( \iint_T k_x(t, \tau) \phi_i(t) \phi_j(\tau) dt d\tau \right)_{i, j=1}.$$

Підставляючи (7.109) і (7.110) в (7.104) з урахуванням (7.105) - (7.110), отримуємо:

$$\Phi^T(t) C^y + \int_0^T \Phi^T(t) A_0^y \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) C^y d\tau = \int_0^T \Phi^T(t) A^x \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) C^x d\tau, \quad (7.111)$$

або, після деяких перетворень вираз (4.111) дорівнює:

$$\begin{aligned} & \Phi^T(t) C^y + \Phi^T(t) A_0^y C^y \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) C^y d\tau = \\ & = \Phi^T(t) A^x C^y \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) C^y d\tau. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Оскільки  $\int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau = I$  - одинична матриця, то рівняння (7.112) набуває вигляду

$$C^y + A_0^y C^x = A^x C^x. \quad (7.113)$$

Позначимо

$$A^y = I + A_0^y. \quad (7.114)$$

З (4.113) знаходимо відображення вхідного вектора  $C^x$  у вихідний вектор  $C^y$  :

$$C^y = (A^y)^{-1} A^x. \quad (7.115)$$

Квадратну матрицю  $A$  виду

$$A = (A^y)^{-1} A^x \quad (7.116)$$

називають матричним оператором або спектральною характеристикою системи щодо ортонорміруючого базису  $\Phi \times \Phi$ .

Вводячи, за аналогією з типовими динамічними ланками лінійних систем, типові матричні оператори інтегрування, диференціювання і множення можна формувати з цих операторів матричні структурні схеми системи в обраному базисі. Причому для таких структурних схем справедливі ті ж правила перетворення що і для лінійних систем. Матричний оператор послідовного з'єднання елементів дорівнює добутку матричних операторів окремих елементів  $A = A_1 A_2$  (рис. 7.4).



Рис. 7.4 Послідовне з'єднання операторів

Слід звернути увагу на те, що матричні оператори перемножуються від виходу до входу. Матричний оператор паралельного з'єднання елементів дорівнює сумі матричних операторів окремих елементів (рис. 7.5).

Матричний оператор з'єднання зі зворотним зв'язком (рис. 7.6) визначається добутком матричного оператора прямої вітки на матричний оператор виду  $(I + A_2 A_1)^{-1}$  :

$$A = A_1 (I + A_2 A_1)^{-1} \quad (7.117)$$

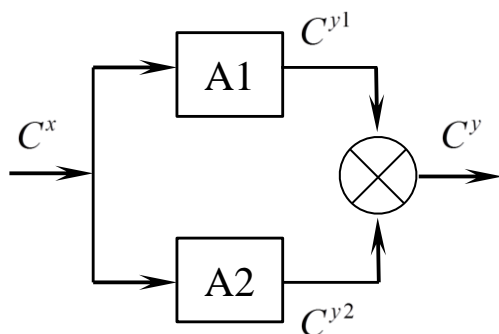


Рис.7.5 Паралельне з'єднання операторів

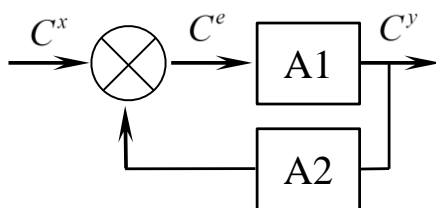


Рис.7.6 Зустрічно-паралельне з'єднання елементів

**Приклад 7.5.** Побудуємо матричний оператор інтегрування

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (7.118)$$

в базисі функцій Уолша для вхідного сигналу  $x(t) = t$  заданого на інтервалі часу  $[0, 1]$ . Оскільки функції Уолша приймають значення  $+1$  і  $-1$ , то їх дискретним аналогом будуть рядки матриці Адамара  $\Phi(t_i) = H$ , елементи якої визначають значення функцій на множині рівновіддалених точок.

Побудувавши матрицю Адамара, коефіцієнти розкладання функції  $x(t)$  можна обчислити за формулою:

$$C^x = \frac{1}{n} HX, \quad (7.119)$$

де  $n$ -число дискретних значень,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор, елементи якого представляють дискретні значення функцій  $x(t)$ , визначені всередині інтервалів дискретизації.

Для знаходження матричного оператора інтегрування підставимо у вираз для інтегрованою функції її розкладання по вибраному базису

$$y(t) = \int_0^T x(\tau) d\tau = \int_0^T \Phi^T(\tau) C^x d\tau. \quad (7.120)$$

Оскільки  $C^x$  не залежить від  $\tau$  її можна винести за знак інтеграла

$$y(t) = \left[ \int_0^T \hat{O}^T(\tau) d\tau \right] C^x \quad (7.121)$$

а інтеграл від базисних функцій розкласти по вибраному базису

$$\Phi_s(t) = \int_0^t \Phi^T(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \Phi(\tau_i) \Delta\tau = A_u \Phi(\tau_i) \quad (7.122)$$

звідки можна знайти шуканий оператор інтегрування

$$A_u = \Phi^{-1} \Phi_s. \quad (7.123)$$

Як випливає з (7.122) матрицю можна отримати підсумовуванням з накопиченням матриці  $\Phi(t_i) = H$  або матриці Адамара.

Наведемо результати розрахунків:

Матриця Адамара

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

коефіцієнти розкладання вхідного сигналу

$$C^x = [0,5000 \quad -0,0625 \quad -0,1250 \quad 0 \quad -0,2500 \quad 0 \quad 0 \quad 0];$$

інтегральний оператор

$$A_i =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5625 & 0,0625 & 0,1250 & 0 & 0,2500 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0625 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1250 & 0 & 0,0625 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0625 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2500 & 0 & 0 & 0 & -0,0625 & 0,0625 & 0,1250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0625 & 0,0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1250 & 0 & 0,0625 & 0,0625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0625 & 0,0625 \end{bmatrix};$$

коефіцієнти розкладання вихідного сигналу

$$C^y = [0,1992 -0,0352 \quad -0,0703 \quad 0,0078 \quad -0,1306 \quad 0,0156 \quad 0,0313 \quad 0] \quad (7.124)$$

значення вихідного сигналу

$$y = [0,0078 \quad 0,0313 \quad 0,0703 \quad 0,1250 \quad 0,1953 \quad 0,2813 \quad ];$$

графіки інтегрування  $x(t) = t$  для  $n=8$  (Рис.7.7):

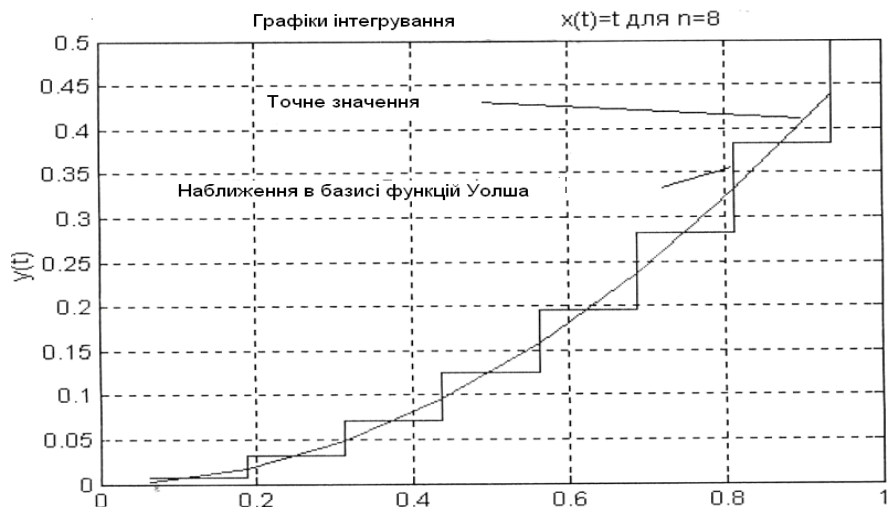


Рис 7.7 Графік інтегрування  $x(t)$

#### 7.4.2. Нелінійні системи

Моделювання нелінійних систем можна розглядати як апроксимацію оператора, що характеризує систему, в класі функціональних поліномів заданого ступеня. Рішення задачі методом матричних операторів спрощується за умови ортогональності поліномів. Для апроксимації статичних нелінійних систем можуть застосовуватися звичайні поліноми: Чебишева, Ерміта, Лагерра та ін. Для динамічних систем потрібна побудова функціональних поліномів, бажано ортогональних для заданого класу вхідних і вихідних сигналів системи. Зокрема, функціонали Вінера ортогональні для білого гаусового шуму.

Процес в нелінійній системі може бути представлено як перетворення множини  $X$  вхідних сигналів у множину  $Y$  вихідних сигналів за допомогою нелінійного оператора  $F$ . Різні класи процесів визначаються видом елементів трійки  $\langle X, Y, F \rangle$ . Сигнали можуть бути визначені у вигляді двійки  $\langle T, S \rangle$ , де множина  $T$  визначає область завдання сигналу, а множина  $S$  - область його значень. Для безперервних сигналів множини  $T$  і  $S$  нескінченні, а для дискретних, обмежених кінцеві.



При виборі форми математичного опису нелінійних систем необхідно враховувати не тільки спільність використовуваного апарату, але і можливість застосування вже усталених понять і узагальнення відомих методів лінійних систем на нелінійний випадок. Найбільшим перевагами в цьому сенсі має підхід, заснований на використанні функціональних рядів В. Вольтера. Для опису нелінійних систем дані ряди вперше були використано Н. Вінером. Дотримуючись функціонального підходу, введемо наступні поняття.

Оператор  $H_m = (x_1, \dots, x_m)$  називається  $m$ -лінійним, якщо він лінійний по кожній із змінних  $x_i, i=1, \dots, m$ .

Наприклад, функціонали

$$y(t) = H_m[x_1(t), \dots, x_m(t)] = \int_{T_1} \dots \int_{T_m} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m x_i(t - \tau_i) d\tau_i \quad (7.125)$$

$$y(n) = H_m[x_1(n), \dots, x_m(n)] = \sum_{T_1} \dots \sum_{T_m} h_m(n_1 \dots n_m) \prod_{i=1}^m x_i(n - n_i). \quad (7.126)$$

Оператор  $H_m$ , отриманий з  $m$ -лінійного оператора підстановкою називається однорідним оператором ступеня  $m$ .

Однорідний оператор ступеня  $m$  має наступну властивість:

$$H_m[\alpha x] = \alpha^m H_m[x]. \quad (7.127)$$

Функціонали

$$y(t) = H_m[x(t)] = \int_{T_1} \dots \int_{T_m} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m x(t - \tau_i) d\tau_i, \quad (7.128)$$

$$y(n) = H_m[x(n)] = \sum_{T_1} \dots \sum_{T_m} h_m(n_1 \dots n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (7.129)$$

є прикладами однорідних операторів ступеня  $m$  відповідно для безперервного і дискретного випадків. Однорідний оператор нульовою мірою являє собою постійну  $h_0$ .

Функції  $h_m(\tau_1, \dots, \tau_m)$  називаються ядрами порядку  $m$ . Однорідні функціонали з симетричними ядрами називаються регулярними. Ядра однорідних операторів завжди можна сіметрізувати, поклавши їх рівними  $\frac{1}{y!} \sum h_m(n_1, \dots, n_m)$ , де сума обчислюється за всіма перестановками аргументів  $\tau_1, \dots, \tau_m$ .

Функціональним поліномом ступеня  $M$  називається сума однорідних операторів

$$P_M[x] = \sum_{m=0}^M H_m[x]. \quad (7.130)$$

Функціональні поліноми характеризують динамічні нелінійні властивості і можуть бути використані для апроксимації широкого класу нелінійних операторів, подібно розкладанню функції в степеневі ряди (наприклад, ряди Тейлора). Правомірність такого підходу впливає з теореми  $M$ . Фреше, згідно з якою будь-який неперервний функціонал  $F[x]$ , заданий на множині  $X$  функцій  $x(t)$ , неперервних на інтервалі  $T = [ab]$ , з якою завгодно ступенем точності  $\varepsilon$  можна наблизити функціональним поліномом  $P_M[x]$ .

$$|F[x] - P_M[x]| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Вимога безперервності функціоналу  $F[x]$ , необхідна для наближення його послідовністю функціональних поліномів, виконується для нелінійних систем, що мають гладкий характер нелінійності.

Якщо вхідний сигнал  $x(t)$  безперервний всюди на дійсній осі, то вихідний сигнал  $y(t)$  системи може бути представлено збіжним функціональним рядом Вольтера:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m[x(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K \int_{-\infty}^{\infty} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m x(t - \tau_i) d\tau_i. \quad (7.131)$$

У дискретному випадку аналогом даного ряду є розкладання

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m[x(n)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (7.132)$$

Цифровою поліноміальною системою порядку  $M$  будемо називати дискретну систему, яка визначається дискретним функціональним поліномом

$$y(n) = \sum_{m=0}^M H_m[x(n)] = \sum_{m=0}^M \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (7.133)$$

Окремі складові рівняння (7.133), які визначаються згорткою

$$y(n) = H_m[x(n)] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i) \quad (7.134)$$

будемо називати однорідною цифровою поліноміальною системою порядку  $m$ .

Для  $m=1$  вираз (7.134) являє собою звичайну лінійну згортку, яка визначає лінійну дискретну систему із імпульсною характеристикою  $h_1(n)$ . Для  $m > 1$  згортка (7.134) нелінійна відносно  $x(n)$ . Назвемо її нелінійною згорткою порядку  $m$ . Така згортка визначає однорідну систему  $m$ -го порядку з ядром  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ . По аналогії з  $h_1(n)$  будемо також називати ядро нелінійною імпульсною характеристикою порядку  $m$ .

Деякі поняття лінійних систем переносяться на випадок поліноміальних систем. Умовою фізичної реалізованості однорідної системи порядку  $m$ :

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = 0 \text{ при } n_i < 0, i=1, \dots, m;$$

гарантією її стійкості є наступна нерівність

$$\sum_{n_1=-\infty}^n K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} |h_m(n_1, \dots, n_m)| < \infty,$$

Умова виконується, якщо тривалість нелінійної імпульсної характеристики обмежена величиною  $N$ .

Таким чином, фізично реалізуємо стійку поліноміальну систему  $m$ -го порядку можна представити у вигляді

$$y(n) = \sum \sum \dots \sum | h_m(n_1, \dots, n_m) \Pi x(n - n_i). \quad (7.135)$$

Для даної системи вихідний сигнал  $y_m(n)$  в точці  $n$  нелінійним чином залежить від попередніх  $N$  відліків  $x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)$  вхідного сигналу. Якщо розглядати ці відліки як  $N$  змінних, то вираз (7.135) можна інтерпретувати як поліноміальне наближення деякої функції  $F(x_1, \dots, x_N)$  багатьох змінних.

Як відомо, імпульсну характеристику  $h_1(n)$  можна розглядати як реакцію лінійної системи на одиничний імпульс. Нелінійним імпульсним характеристикам  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  також можна дати наочну інтерпретацію. Згідно з принципом суперпозиції реакція лінійної системи на вхідний сигнал  $x(n) = \delta(n - s_1) + \delta(n - s_2)$  у вигляді суми двох одиничних імпульсів буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= H_1[\delta(n - s_1)] + H_1[\delta(n - s_2)] = \\ &= h_1(n - s_1) + h_1(n - s_2). \end{aligned} \quad (7.136)$$

Визначимо тепер реакцію  $y_2(n)$  однорідної системи другого порядку на цю пару імпульсів

$$Y_2(n) = H_2[\delta(n - s_1)] + H_2[\delta(n - s_2)] + 2h_2(n - s_1, n - s_2). \quad (7.137)$$

На відміну від (7.136) вихідний сигнал  $Y_2(n)$  такої квадратичної поліноміальної системи поряд з реакціями на окремі імпульси містить додатковий член, рівний  $2h_2(n - s_1, n - s_2)$  та визначає взаємний вплив пари імпульсів один на одного. Загалом при впливі суми  $m$  імпульсів на однорідну систему  $m$ -го порядку

$$Y_m(n) = \sum_{i=0}^m H_m[\delta(n - s_i)] + \sum \frac{m!}{v_1 K v_p} h_m(n - i_1, \dots, n - i_m). \quad (7.138)$$

Перший член (7.138) представляє суму реакцій на окремі імпульси, другий визначає їх взаємодію і утворений різними сполученнями  $(i_1, \dots, i_m)$  з повтореннями із сукупності елементів  $(s_1, \dots, s_m)$ , причому кожне таке поєднання складається з  $p$  груп ( $p > 1$ ), що містять  $v_j$  рівних між собою елементів.

Таким чином, нелінійна імпульсна характеристика  $h_m(i_1, \dots, i_m)$  визначає складову реакції  $y(n)$  системи, обумовлену взаємодією  $m$  імпульсів, розташованих від поточної точки  $n$  на відстані  $i_1, \dots, i_m$  відліків. Так як довільний дискретний сигнал  $x(n)$  можна представити у вигляді суми  $\delta$ -функцій

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i),$$

то імпульсну характеристику  $h_m(i_1, \dots, i_m)$  порядку  $m$  можна розглядати як кількісну міру нелінійної взаємодії між  $m$  імпульсами вхідного сигналу.

Одномірні функціональні ряди узагальнюються на багатовимірний випадок.

$$\begin{aligned} y(n_1, \dots, n_r) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m[x(n_1, \dots, n_r)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_{11}=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_{1r}=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_{mr}=-\infty}^{\infty} h_m(n_{11}, \dots, n_{1r}, K, n_{m1}, \dots, n_{mr}) \times \prod_{i=1}^m x(n - n_{i1}, K, n - n_{ir}), \end{aligned}$$

де  $h_m(n_{11}, \dots, n_{1r}, \dots, n_{m1}, \dots, n_{mr})$ ,  $r$  – мірне ядро Вольтерра порядку  $m$ , що представляє собою функцію  $rm$  аргументів. З метою спрощення просторові змінні будемо об'єднувати в вектори, записуючи  $r$ -мірні сигнали і ядра у вигляді функцій векторних аргументів:  $x(n)$ ,  $y(n)$ ,  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ , де  $n = [n_1 n_2 \dots n_r]^T$ ,  $n_i = [n_{i1} n_{i2} \dots n_{ir}]^T$ .

Багатовимірна поліноміальна модель системи характеризується функціональним поліномом

$$y(n) = \sum_{m=0}^M H_m[x(n)], \quad (7.140)$$

де  $x(n)$  і  $y(n)$  позначають відповідно  $r$ -мірні вхідний і вихідний сигнали,  $H_m[x(n)]$  – однорідний  $r$ -мірний дискретний функціонал, що визначає вихідний сигнал  $Y_m(n)$  однорідного нелінійного фільтра  $m$ -го порядку і дорівнює:

$$Y_m(n) = H_m[x(n)] = \sum_{n_1} K \sum_{n_m} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{j=1}^m x(n - n_j), \quad (7.141)$$

де  $\sum_n$  означає  $r$ -кратне підсумовування по всіх елементах вектора  $n$ .

Назвемо однорідну систему рівнянь, що описують поліноміальну систему виду (7.141)  $rm$ -системою.

Для  $m = 1$  ядро  $h_m(n_1)$  являє собою звичайну імпульсну характеристику багатовимірної лінійної системи, для  $m = 2, \dots, M$  ядра  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  можна розглядати, як імпульсні характеристики вищих порядків, які характеризують нелінійні властивості багатовимірних поліноміальних систем. Використовуючи в якості вхідного сигналу суму просторових  $\delta$ -функцій, імпульсну характеристику  $h_m(n_1, \dots, n_m)$   $m$ -го порядку можна інтерпретувати аналогічно одновимірній, розглядаючи її як складову реакції системи, обумовлену взаємодією  $m$ -просторових імпульсів.

### 7.5. Аппроксімація нелінійної системи ортогональними поліномами

Розглянемо простір функціоналів  $F[x(n)]$ , заданих на множині  $X = \{x(n): n \in T\}$  реалізацій стаціонарного дискретного процесу  $x(n)$ , та відзначимо норму та скалярний добуток функціоналів виду

$$\begin{aligned} \|F[x(n)]\|^2 &= (F[x(n)], F[x(n)], (F_1[x(n)], F_2[x(n)]) = \\ &= M\{(F_1[x(n)] * F_2[x(n)])\} \end{aligned}$$

Тоді задачу моделювання нелінійної системи за допомогою полиному  $m$ -го порядку можна інтерпретувати як аппроксімацію функціонала

$$Y(n) = F[x(n)],$$

який описує поведінку нелінійної системи, функціональним поліномом  $P_m[x(n)]$ , за умови:

$$\|F[x(n)] - P_m[x(n)]\|^2 \rightarrow \min. \quad (7.142)$$

Рішення цієї задачі в гільбертовому просторі функціоналів приводить до рівняння:

$$(P_M[x(n)] - F[x(n)], P_m[x(n)]) = 0. \quad (7.143)$$

Визначення ядер дискретного функціонального полінома можна спростити, якщо уявити  $P_m[x(n)]$ , сумою ортогональних функціоналів

$$P_m[x(n)] = \sum_{m=0}^M G_M[h_m, x(n)] \quad (7.144)$$

Поліном, який визначається даним виразом, будемо називати ортогональним поліномом порядку  $m$  для класу вхідних сигналів  $x(n)$ . Ортогональність функціоналів  $G_M[h_m, x(n)]$  в (7.144) розуміється в сенсі рівності нулю скалярного добутку функціоналів різних порядків

$$G_i[h_i, x(n)], P_j[h_j, x(n)] = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ \|G_i[h_i, x(n)]\|^2, i = j. \end{cases} \quad (7.145)$$

На відміну від розкладання в ряд Вольтера (7.132), що є узагальненням ряду Тейлора, розкладання оператора  $F[x(n)]$ , по ортогональних функціоналах  $G_m[h_m, x(n)]$ , можна розглядати як узагальнений ряд Фур'є. У цьому випадку ядра ортогонального полінома визначаються із системи незалежних рівнянь

$$(F[x(n)], G_M[h_m, x(n)]) = \|G_M[h_m, x(n)]\|^2, \quad (7.146)$$

яка легко може бути отримана з (7.143) з урахуванням властивості ортогональності (7.145)

Структура ортогональних функціоналів  $G_m[h_m, x(n)]$  залежить від імовірнісних властивостей процесу  $x(n)$ . Для статичних нелінійних

систем ( $T=\{n\}$ ) визначення ортогональних функціоналів не складає труднощів. Вони фактично збігаються зі звичайними поліномами (Ерміта, Чебишева, Лежандра та ін), ортогональними з вагою, рівною щільності ймовірності  $f(x)$  сигналу  $x(n)$ . У разі динамічних систем з пам'яттю ( $T = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ ) і статистично незалежними процесами на вході для побудови  $G_m[h_m, x(n)]$  також можна скористатися одновимірними ортогональними поліномами.

Нехай для процесу  $x\{n\}$  існує поліноміальний базис  $p_i[x(n)]$  такий, що

$$M\{p_i[x(n)]p_j[x(n)]\} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ p_i^2[x(n)], i = j. \end{cases}$$

Вид поліномів визначається щільністю  $f(x)$  випадкового процесу  $x(n)$ . Зокрема, для гаусового процесу  $x(n)$  з математичним очікуванням  $M\{x(n)\} = 0$  і дисперсією  $M\{x^2(n)\} = \sigma^2$  таким базисом будуть многочлени Ерміта виду

$$p_m(x) = \sum_{r=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^r m! \sigma^{2r}}{r! 2^r (m-2r)!} x^{m-2r}, \quad (7.147)$$

перші з яких рівні  $P_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = x^2 - \sigma^2$ ,  $P_3(x) = x^3 - 3\sigma^2 x$ .

Визначимо тепер симетричні багатовимірні поліноми виду

$$\phi_m \left[ \frac{x(i_1) \dots x(i_1)}{m_1} \dots \frac{x(i_s) \dots x(i_s)}{m_s} \right] = p_{m_1}[x(i_1)] \dots p_{m_s}[x(i_s)]$$

для яких  $m = m_1 + \dots + m_s$ ,  $i_1 \dots i_s$ , а всі індекси  $s$  різні. З статистичної незалежності відліків  $x(i_1), \dots, x(i_s)$  випадкового процесу витікає ортогональність таких поліномів у наступному сенсі:



$$M \left\{ \Phi_m \left[ \underbrace{x(i_1), \dots, x(i_1)}_{m_1}, \dots, \underbrace{x(i_s), \dots, x(i_s)}_{m_s} \right] \Phi_n \left[ \underbrace{x(j_1), \dots, x(j_1)}_{k_1}, \dots, \underbrace{x(j_r), \dots, x(j_r)}_{k_r} \right] \right\} \\ \left\{ 0, (m \neq n) \text{ для } \forall \text{Per}(k_1, \dots, k_s) \neq (m_1, \dots, m_s); \right. \\ \left. \prod_{j=1}^s M \left\{ p_{m_j}^2 \left[ x(i_j) \right] \right\}, (m = n) \exists \text{Per}(k_1, \dots, k_s) = (m_1, \dots, m_s). \right. \quad (7.148)$$

Скалярний добуток поліномів відмінний від нуля тільки в тому випадку, якщо їх ступеня рівні й існує перестановка  $\text{Per}(k_1, \dots, k_s)$  сукупності індексів  $(k_1, \dots, k_s)$ , переводячи її в  $(m_1, \dots, m_s)$ .

Дана властивість дає підставу стверджувати, що функціонали виду

$$G_M[h_m, x(n)] = \\ = \sum_{i_1 \in T} K \sum_{i_m \in T} h_m(n_1, \dots, n_M) \Phi_m[x(n-i_1), \dots, x(n-i_m)] \quad (7.149)$$

будуть задовольняти умові ортогональності (7.145). Використовуючи поліноми Ерміта (7.147) отримуємо (як окремий випадок) функціонали Вінера:

$$G_0[h_0, x(n)] = h_0, G_1[h_1, x(n)] = \sum_{i \in T} h(i) x(n-1), \\ G_2[h_2, x(n)] = \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_2 \in T} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) - \sigma^2 \sum_{i \in T} h_2(i, i), \\ G_3[h_3, x(n)] = \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_2 \in T} \sum_{i_3 \in T} h_3(i_1, i_2, i_3) x(n-i_1) x(n-i_2) x(n-i_3) - \\ - 3\sigma^2 \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_2 \in T} h_3(i_1, i_2, i_3) x(n-i_1)$$

ортогональні для білого гаусового шуму  $x(n)$  з нульовим середнім і дисперсією  $\sigma^2$ . Аналогічним чином можна побудувати ортогональні функціонали для випадкових процесів типу білого шуму з іншими законами розподілів. Відомі, наприклад, ортогональні функціонали

для імпульсних шумів з пуассоновским розподілом, що визначаються через багатовимірні многочлени Шарльє.

Для ортогональних функціоналів виду (7.149) рівняння (7.146), що визначає його ядра  $h_m(i_1, \dots, i_m)$ , буде виглядати наступним чином:

$$M\{y(n)\Phi_m[x(n-i_1)Kx(n-n_m)]\} = \\ = \sum_1 n_1 [K \sum_{\downarrow} n_m (h_m(n_1, \dots, n_m)x) M\{\Phi_1 m[x(n-i_1)Kx(n-n_m)]\}]. \quad (7.151)$$

З урахуванням ортогональності функціоналів (7.148) рішення може бути отримано в явному вигляді:

$$h_m\left(\frac{i_1 \dots i_1}{m_1} \dots \frac{i_s \dots i_s}{m_s}\right) = \frac{m_1! \dots m_s! M\{y(n)v_{m_1}(n-i_1) \dots v_{m_s}(n-i_s)\}}{m! M\{v_{m_1}^2(n)\} \dots M\{v_{m_s}^2(n)\}},$$

де  $v_i(n) = p[x(n)]$ , все  $i_1, \dots, i_s$  різні,  $m = m_1 + \dots + m_s$ , а  $m = 0, 1, \dots, M$ .

Чисельник отриманого виразу являє собою багатовимірну взаємну кореляційну функцію вихідного сигналу  $y(n)$  системи та різних сигналів  $v_i(n)$ , отриманих перетворенням вхідного сигналу  $x(n)$  ортогональними многочленами різного порядку, а знаменник визначається добутком потужностей сигналів  $v_i(n)$ .

Для випадкових процесів, відмінних від білого шуму з кореляційною функцією  $R_x(n) \neq \delta(n)$  умова (7.148) ортогональності багатовимірних поліномів буде порушуватися. У цьому випадку ортогональні функціонали  $G_m[h_m, x(n)]$  можуть бути отримані безпосередньо з системи лінійно незалежних функціональних поліномів

$$P_m[x(n)] = \\ = \sum_{\downarrow} (s=0)^{T_m} \sum_{\downarrow} (i_{\downarrow 1} \in T) [K \sum_{\downarrow} (i_{\downarrow 2} \in T) [h_s(i_1, \dots, i_s)] \prod_{\downarrow} (j=1) I_j^s [x(n-i, j)]] ,$$

$m = 0, 1$ , за допомогою процедури ортогоналізації Грама-Шмідта. Можна показати, що для гауссових процесів з довільною кореляційною функцією  $R_x(n)$  ортогональні функціонали Вінера визначаються виразом

$$G_M[h_m, x(n)] = \sum_{i_1 \in T} K \sum_{i_m \in T} h_m(i_1, \dots, i_m) He_m[x(n-i_1), \dots, x(n-i_m)], \quad (7.152)$$

де  $hm(i_1, \dots, i_m)$  - ядра Вінера в часовій області.

Вхідні в (7.152) багатовимірні поліноми Ерміта визначаються наступним чином:

$$(-1)^r \sum \left\{ \prod_{(r)} Rx(ni - nj) \prod_{m=2r} x(nk) \right\}, \quad (7.153)$$

де  $Rx(n)$  — кореляційна функція процесу  $x(n)$ ,  $[T/2]$  означає найбільше ціле число, що не перевершує  $m/2$ , а підсумовування проводиться по всіляких розбиттях сукупності  $[n_1, \dots, n_m]$  на  $r$  пар  $\{n_i, nj\}$  елементів  $n_k$ . Наприклад, перші поліноми

$$\begin{aligned} H_{e0} &= H_{e1}[x(i_1)] = x(i_1), \quad H_{e2}[x(i_1)x(i_2)] = x(i_1)x(i_2) = R_x(i_1 - i_2) \\ H_{e3}[x(i_1)x(i_2)x(i_3)] &= \\ &= x(i_1)x(i_2)x(i_3) - x(i_1)R_x(i_3 - i_2) - x(i_2)R_x(i_3 - i_1) - x(i_3)R_x(i_2 - i_1), \end{aligned}$$

Властивість ортогональності даних поліномів має наступний вигляд:

$$M\{He_m[x(i_1) \dots x(i_m)]He_m[x(j_1) \dots x(j_n)]\} = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ \sum \prod_{(m)} R_x(i_s - i_r), m = n; \end{cases}$$

де підсумовування здійснюється за різними розбиттями (всього  $m!$ ) на пари  $(i_s, j_r), i_s \in (i_1, \dots, i_m), j_r \in (j_1, \dots, j_m)$ , а добуток містить  $m$  співмножників, відповідних кожному такому розбиттю. На відміну від виразу (7.148), що визначає умову ортогональності для білого шуму, тут скалярний добуток відмінно від нуля як тільки  $m = n$  і не потрібно існування перестановки  $Per$ .

Для функціоналів (7.152) рівняння (7.151), що визначає оптимальні ядра ортогонального ряду Вінера з кольоровим процесом на вході, виглядає так:

$$\sum_{i_1 \in T} K \sum_{i_m \in T} h_m(i_1, \dots, i_m) \prod_{j=1}^m R_x(n_j - ij) = R_{yHe}(n_1, \dots, n_m), \quad (7.155)$$

де  $R_{yHe}(n_1, \dots, n_m) = M\{y(n)x(n-n_1)\dots x(n-n_m)\}$  представляє взаємну кореляційну функцію вихідного сигналу у  $(n)$  системи та багатовимірного многочлена Ерміта виду (7.153) від вхідного сигналу  $x(n)$ . Отримане рівняння не допускає явного рішення в часовій області, як у випадку білого шуму, але воно може бути вирішено в частотній. Дійсно, обчислюючи багатовимірне перетворення Фур'є від обох частин рівняння (7.155) отримаємо:

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = \frac{S_{yHe}(\omega_1, \dots, \omega_m)}{m! Sx(\omega_1) K Sx(\omega_m)}, \quad (7.156)$$

де  $Sx(\omega)$  - спектр потужності процесу  $x(n)$ ,

$SyHe(\omega_1, \dots, \omega_m)$  – перетворення Фур'є функції  $SyHe(n_1, \dots, n_m)$ .

Для виконання практичних розрахунків ядер рядів Вінера доцільно визначити  $SyHe(n_1, \dots, n_m)$  та  $SyHe(\omega_1, \dots, \omega_m)$  безпосередньо через дані вхід-вихід, що моделюється. Враховуючи, що скалярний добуток функціоналу  $m$ -го порядку і однорідного функціоналу меншого порядку дорівнює нулю, можна записати:

$$S_{yHe}(n_1, \dots, n_m) = M\{y_m(n) He_m[x(n-n_1), \dots, x(n-n_m)]\} =$$

$$M\{y_m(n) \prod_{i=1}^m x(n-n_i)\}, \quad (7.157)$$

де сигнал  $y_m(n)$  формується у вигляді різниці вихідних сигналів системи та ортогонального фільтра  $(m-1)$ -го порядку

$$y_m(n) = y(n) - y_{m-1}(n) = y(n) - \sum_{i=1}^{m-1} G_i[h_i, x(n)]. \quad (7.158)$$

Праву частину (7.157) можна розглядати як багатовимірну взаємну кореляційну функцію

$$S_{ymxKx}(n_1, \dots, n_m) = M_x\{y_m(n) \prod_{i=1}^m x(n-n_i)\},$$

а її перетворення  $S_{y_m x K_x}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  - як багатовимірний взаємний спектр різницевого і вхідного  $x(n)$  сигналів системи. Тоді вираз (7.156) для ядер Вінера в частотній області може бути записано в такій формі:

$$H_m(\varpi_1, \dots, \varpi_m) = \frac{S_{yHe}(\varpi_1, \dots, \varpi_m)}{m! S_x(\varpi_1) S_x(\varpi_m)}. \quad (7.159)$$

Знайдемо зв'язок взаємного спектру  $S_{y_m x K_x}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  процесів  $y_m(n)$  та  $x(n)$  з перетворенням Фур'є, а також їх реалізацій  $y_{mN}(n)$  та  $x_N(n)$  тривалістю  $N$  відліків. Використовуючи властивості перетворення Фур'є, можна показати справедливність наступного співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left[ Y_m(\varpi_1, \dots, \varpi_m) \prod_{i=1}^m X^*(\varpi_i) \right] = \\ & = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} R_{y_m x \dots x}(n_1, \dots, n_m) \exp(-j \sum_{i=1}^m n_i \varpi_i), \end{aligned} \quad (7.160)$$

де  $Y_m(\omega)$  і  $X(\omega)$ - перетворення Фур'є відповідно реалізацій  $y_{mN}(n)$  та  $x_N(n)$ ; а оцінка багатовимірної кореляційної функції, обумовлена виразом

$$\hat{R}_{y_m x \dots x}(n_1, \dots, n_m) = \frac{1}{N} \sum_n y_{mN}(n) \prod_{i=1}^m x_N(n - n_i).$$

Обчислюючи математичне очікування від обох частин рівняння (4.160) і спрямовуючи  $N$  до нескінченності, отримаємо:

$$S_{y_m x \dots x}(\varpi_1, \dots, \varpi_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} M \left\{ Y_m(\varpi_1 + \dots + \varpi_m) \prod_{i=1}^m X^*(\varpi_i) \right\}. \quad (7.161)$$

Вирази (7.159) і (7.161) характеризують ядра Вінера як багатовимірні періодичні в комплексному просторі функцій, що мають властивість симетрії щодо всіляких перестановок аргументів і властивість комплексно спряженої симетрії.

## 7.6. Параметрична ідентифікація дискретних моделей об'єктів різними методами

### 7.6.1. Ідентифікація дискретних моделей методом найменших квадратів

Параметрична ідентифікація дозволяє знаходити значення коефіцієнтів моделі за вимірювальним значенням керуемого у і керуючого  $u$  сигналів об'єкта. Передбачається, що структура й порядок моделі об'єкта відомі. Вимірювальні значення у і  $u$  представляються у вигляді часового ряду, тому оцінюються параметри АРСС – моделі об'єкта, або параметри його дискретної передатної функції. За коефіцієнтами АРСС – моделями і її структурою можна перейти до неперервних моделей.

Підставимо у рівняння АРСС – моделі значення сигналів  $y(k)$  і  $u(k)$ , а також оцінки параметрів об'єкта, отримані після  $(k-1)$ -го такту:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) - b_1 u(k-d-1) - \dots - b_m u(k-d-m) = e(k). \quad (7.162)$$

Помилка  $e(k)$  відображає присутність похибки вимірювань вихода й неточність оцінок параметрів моделі  $a_i$  и  $b_i$ . Позначимо значення  $y(k)$  як значення  $y(k/k-1)$ , предсказане у момент  $(k-1)$  на момент  $k$ . Тоді

$$y(k/k-1) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m), \quad (7.163)$$

або

$$y(k/k-1) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k-1), \quad (7.164)$$

де  $\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$  – вектор оцінок,

$$\Psi^T(k)\hat{\theta} = \begin{bmatrix} -y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m) \end{bmatrix}^T \quad \text{вектор}$$

даних,  $d$ - величина дискретного запізнення.

$$\text{Помилка рівняння } e(k) = y(k) - y(k/k-1), \quad (7.165)$$

де  $y(k)$  - нове вимірювання;  $y(k/k-1)$  - предсказане за моделлю значення вимірювання.

Припустимо, що вимірювання виконано на інтервалі  $k=1, 2, \dots, n+d+N$ , а порядок АРРС – моделі  $(n, n)$ . Тоді на основі (7.164) і (7.165) отримаємо векторне-матричне рівняння вигляду

$$y(k) = \Psi^T(k)\hat{\theta}(k-1) + e(k), \quad (7.166)$$

де  $y^T(k) = [y(n+d), y(n+d+1), \dots, y(n+d+N)]$  – вектор виходу,

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} -y(n+d-1) & \dots & -y(d) & u(n-1) & \dots & u(0) \\ -y(n+d) & \dots & -y(d+1) & u(n) & \dots & u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(n+d+N-1) & \dots & -y(n+d) & u(n+N-1) & \dots & u(N) \end{bmatrix}.$$

матриця даних,

$e^T(n+d+N) = [e(n+d), e(n+d+1), \dots, e(n+d+N)]$ . – вектор помилок.

Функція втрат за критерієм найменших квадратів:

$$J = e^T(n+d+N)e(n+d+N) = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} e^2(k), \quad (7.167)$$

Її мінімум знаходиться з умови

$$dJ / d\theta = 0 \quad (7.168)$$

Припускаючи, що  $N \gg 2n$ , позначимо

$$P(n+d+N)=[\Psi^T(n+d+N)\Psi(n+d+N)]^{-1}, \quad (7.169)$$

тоді відмінка мінімізуючи функцію втрат (11.6) буде мати вигляд:

$$\hat{\theta}(n+d+N)=P(n+d+N)\Psi^T(n+d+N)y(n+d+N). \quad (7.170)$$

Алгоритм (7.170) – некреурентний, побудований за методом найменших квадратів, так як обчислення оцінок параметрів  $\hat{\theta}(n+d+N)$  моделі виконується лише після того як формується увесь масив вхідних та вихідних даних об'єкта  $\Psi(n+d+N)$

Рекурентний алгоритм МНК отримується після запису нової  $\hat{\theta}(k+1)$  і старої  $\hat{\theta}(k)$  оцінок і віднімання одної з іншої:

$$\hat{\theta}(k+1)=\hat{\theta}(k)+\gamma(k)\left[y(k+1)-\Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)\right]. \quad (7.171)$$

Вектор  $\gamma$  корекції визначається зі співвідношення:

$$\gamma(k)=\frac{P(k)\Psi(k+1)}{\Psi^T(k+1)P(k)\Psi(k+1)+1}. \quad (7.172)$$

Вектор  $P(k+1)$  на наступному кроці обчислюється як

$$P(k+1)=\left[I-\gamma(k)\Psi^T(k+1)P(k)\right]. \quad (7.173)$$

Рекурентний алгоритм метода найменших квадратів :

1. Задаються початкові значення вектора оцінок параметрів моделі і вектора даних:

$$\hat{\theta}(0)=0; P(0)=\alpha I, \quad (7.174)$$

де  $\alpha \gg 1$ ,  $I$ - одинична матриця відповідної розмірності.

2. Виконується вимірювання вхідного і вихідного сигналів об'єкта, і формується новий вектор даних  $\Psi(k+1)$ .

3. Обчислюється вектор (7.172) корекції  $\gamma(k)$ .

4. Знаходиться нова оцінка (7.171) параметрів  $\theta(k+1)$ .

5. Обчислюється новий вектор  $P(k+1)$  за формулою (7.171).

Зазвичай має місце корельованість часу шумів  $e(k)$ . Як було показано в розділах, використання звичайного МНК визиває



зміщення оцінок параметрів. Погіршення цих оцінок приводить до погіршення оцінок змінних станів  $x(k)$  моделі.

Для отримання незміщених оцінок використовується узагальнений МНК(УМНК), за якого оцінюються параметри моделей об'єкта і шуму на виході. Ідентифікації підлягає модель максимальної правдоподібності (МП – МОДЕЛЬ), для якої зв'язок між змінними задається рівнянням

$$A(z)y(z) - B(z)z^{-d}u(z) = D(z)e(z). \quad (7.175)$$

Введемо розширені вектори даних і параметрів

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^T(k) = & \\ = & y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n) \end{aligned} \quad (7.176)$$

Тоді вихідний сигнал об'єкта можна записати через (7.176) і (7.177):

$$y(k) = \hat{\Psi}^T(k) \hat{\theta}(k-1). \quad (7.177)$$

Оцінка параметрів МП – моделі обчислюються аналогічно МНК за формулами (11.10) – (11.12).

### 7.6.2. Ідентифікація методом допоміжних змінних.

Метод допоміжних змінних (МДЗ) використовується, коли існує кореляція між сигналом шуму  $e(k)$  та елементами вектора даних  $\hat{\Psi}^T(k+1)$ . Модель об'єкта і шум представлена у вигляді повної моделі:

$$y(z) = \frac{D(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{D(z)}{C(z)} e(z), \quad (7.178)$$

де  $z^{-d}$  – враховує можливе запізнення на  $d$  кроків  $\Delta t$ . Алгоритм ідентифікації за методом допоміжних змінних подібний алгоритму МНК. Для реалізації алгоритму вводять вектор допоміжних змінних.

$$H^T(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)], \quad (7.179)$$

у якості котрих використовуються вихідні сигнали  $h(k)$  допоміжної моделі з параметрами  $\hat{\theta}_b(k)$ :

$$h(k) = H^T(k) \hat{\theta}_b(k) \quad (7.180)$$

Для зменшення степені кореляції між допоміжними змінними й помилкою, у параметри допоміжної моделі визначаються як вихід низькочастотного дискретного фільтра першого порядку з запізненням  $\eta$ , на вхід котрого подається оцінка параметрів об'єкта

$$\hat{\theta}_b(k) = (1 - \beta) \hat{\theta}_b(k-1) + \beta \hat{\theta}(k - \eta), 0,01 \leq \beta \leq 0,1. \quad (7.181)$$

$$\text{Вектор корекції } \gamma(k) = \frac{P(k) \cdot \varphi(k+1)}{\Psi^T(k+1)P(k) \cdot \varphi(k+1) + 1}, \quad (7.182)$$

нове значення вектора  $P(k+1)$

$$P(k+1) = [I - \gamma(k) \varphi^T(k+1)] P(k), \quad (7.183)$$

Оцінки вектора параметрів обчислюються за формулою (11.10). На початковому рівні метод чутливий до вибору вихідних значень  $\hat{\theta}(0)$  і  $P(0)$ , а також коефіцієнта  $\beta$  фільтра (7.181). Для підвищення стійкості алгоритму на початку доцільно скористатися МНК.

МДЗ дозволяє обчислити тільки оцінки параметрів об'єкта, якщо для оцінки параметрів моделі формуючого фільтру шуму можливо використати МНК. Модель шуму представлена стаціонарним авторегресійним процесом з ковзним середнім

$$\begin{aligned} y(k) + c_1 y(k-1) + \dots + c_p y(k-p) = \\ = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \end{aligned} \quad (7.184)$$

Вводимо вектор даних

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-p), v(k-1), \dots, v(k-p)],$$

і вектор параметрів

$$\rho^T [c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_p],$$

записуємо (7.184) у вигляді векторно-матричного рівняння аналогічного МНК

$$y(k) = \varphi^T(k) \rho(k-1) + v(k). \quad (7.185)$$

Щоб використати алгоритм МНК до АРСС, моделі невідомих перешкод замінюються їх оцінками. Із (7.185) маємо

$$v(k) = y(k) - \hat{\varphi}^T(k) \hat{\rho}(k-1), \quad (7.186)$$

де

$$\hat{\varphi}^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-p), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-p)]. \quad (7.187)$$

Після цього обчислюється нова оцінка вектора даних

$$\varphi^T(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-p+1), \hat{v}(k), \dots, \hat{v}(k-p+1)]. \quad (7.188)$$

В якості початкових значень беруться

$$\hat{v}(0) = 0; \hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \alpha \ll 1.$$

### 7.6.3. Ідентифікація дискретних моделей методом максимальної правдоподібності

Похибка ідентифікації  $e(k)$  представляє собою дискретну випадкову величину  $E$ , яка залежить від вектора параметрів  $\theta$  АРСС моделі. Нехай у результаті проведення вимірювань отримана вибірка випадкової величини  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  об'ємом  $l$ . Позначимо вірогідність з'явлення якого-небудь числа вибірки  $P(E = e_j)$  через  $p_j(\theta)$ , а через  $f_1, f_2, \dots, f_r$  абсолютні частоти, з якими з'являються

значення  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  у вибірці, причому  $(\sum_{j=1}^r f_j = n)$ . В цьому випадку функцією правдоподібності називають функцію параметрів моделі, яка визначається співвідношенням

$$L(x_1, x_2, \dots, x_l; \theta) = p_1^{f_1}(\theta) p_2^{f_2}(\theta) \dots p_r^{f_r}(\theta). \quad (7.189)$$

Метод максимальної правдоподібності (ММП) полягає в тому, що в якості оцінки параметрів  $\theta$  беруться такі їх значення, за яких функція правдоподібності досягає свого максимуму. Це значення  $\theta_{\max} = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l)$ . (7.190)

Відповідна функція вибірки  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l)$  називається найбільше правдоподібною оцінкою  $\theta$ . Її отримують при рішенні системи рівнянь:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0, \quad (7.191)$$

або

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0. \quad (7.192)$$

Максимальної правдоподібності оцінки за достатньо загальних умов являються незалежними та асимптотично нормально розподіленими (але не завжди незміщені), і мають серед всіх асимптотично нормально розподілених оцінок найбільшу ефективність.

Щоб записати вираз для функції правдоподібності  $L(x_1, x_2, \dots, x_l; \theta) = p_1^{f_1}(\theta) p_2^{f_2}(\theta) \dots p_r^{f_r}(\theta)$ , треба знати аналітичний вираз закону розподілення. Часто вважається, що адитивні перешкоди у рівнянні моделі розподілені нормально. В цьому випадку оцінки ММП для лінійних моделей з незалежним шумом співпадають з оцінками МНК, а метод максимальної правдоподібності дає такий же вираз для функції втрат, що й метод найменших квадратів:

$$L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (7.193)$$

Оскільки у функцію правдоподібності (функцію втрат) параметри моделі входять нелінійно, тому для їх оцінок необхідно мінімізувати функцію втрат вирішив систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Оскільки результати отриманого рішення являються функцією вибірки (7.189), метод максимальної правдоподібності може реалізовуватися тільки у не рекурентному вигляді.

Але якщо провести лінеаризацію функції правдоподібності в малому, а потім її мінімізувати, можна отримати рекурентний алгоритм [1]:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1), \text{ де} \\ \gamma(k) &= P(k+1)\varphi(k+1) = \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)},\end{aligned}\quad (7.194)$$

$$P(k) = \frac{1}{\frac{\partial^2 L[\hat{\theta}(k-1), k]}{\partial \theta^2}},$$

$$P(k+1) = (I - \gamma(k)\varphi^T(k+1))P(k),$$

$$P(k+1) = (I - \gamma(k)\varphi^T(k+1))P(k),$$

$$\varphi^T(k+1) =$$

$$= \{(-y'(k), \dots, -y'(k-n+1), u'(k-d), \dots, u'(k-d-n+1), e'(k), \dots, e'(k-n-1)),$$

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_n y'(k-n),$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n),$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_n e'(k-n),$$

$$e(k) = y(k) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k),$$

$$\hat{v}(k+1) = e(k+1).$$

Початкові значення параметрів  $\theta(0) = 0$ ;  $P(0) = \alpha I$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\alpha \ll 1$ . Вектор  $\Psi(k+1)$  аналогічний вектору (7.175) в УМНК.

На відміну від УМНК в ММП використовується модифікований вектор даних  $\varphi(k+1)$ , як в методі допоміжної змінної. Але, на відміну від МДЗ, в ММП вектор даних корелює з шумами.

Оцінки ММП є асимптотично ефективними, нормально розподілені.

#### 7.6.4. Ідентифікація дискретних моделей методом стохастичної апроксимації.

Метод стохастичної апроксимації (МСА) розроблено для визначення коренів рівняння, якщо значення функції для заданого значення аргументу спостерігаються з похибкою.

Нехай, наприклад, у лінійному різницевому рівнянні (7.166) треба визначити вектор параметрів  $\theta$ . Під час кожного вимірювання дійсне значення  $y_0(k)$  не спостерігається, а спостерігається деяке значення  $y(k)$  піддане дії перешкоди  $v(k)$ , про яку відомо б що

$$M[y(k)] = M[y_0(k)]. \quad (7.195)$$

МСА організує послідовність рішень для знаходження оцінки вектора параметрів при кожному вимірюванні  $\hat{\theta}(k)$ , таку, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = \theta \quad (7.196)$$

Члени цієї послідовності утворюються рекурентною формулою

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)[y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)], \quad (7.197)$$

аналогічною формулі рекурентного МНК. Відмінність заключається у векторі корекції  $\gamma(k)$ .

Доводиться, що, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty \text{ та } \sum_{k=1}^N \gamma^2(k) < \infty, \quad (7.198)$$

дисперсія перешкод  $v(k)$  обмежена і модельоб'єктустійка, то виконується умова (7.196) збіжності  $\hat{\theta}(k)$  до  $\theta$ .

Вираз у квадратних дужках в (7.197) позначено  $e(k)$ , зветься нев'язкою,  $\gamma(k)$  – коефіцієнт корекції.

Вектору параметрів  $\hat{\theta}(k)$  відповідає вектор нев'язок  $e(k)=[y(k+1)-\Psi^T(k+1)\theta(k)]$  та матриця коефіцієнтів  $\gamma(k)$ .

Умовам (7.198) відповідає велика кількість послідовностей, наприклад,

$$\gamma(k)=\frac{c}{k}, c=const \quad (7.199)$$

МСА легко переноситься на задачі визначення параметрів у стохастичних системах в умовах послідовного отримання оцінок (рекурентна ідентифікація).

Нехай рівняння моделі задано у вигляді (7.166),  $M[e(k)]=0$ , та функція втрат представлення у вигляді (7.167):

$$J=e^T(N)e(N)=\sum_{k=1}^N e^2(k),$$

$$\text{тоді } e(k+1)=\frac{dJ}{d\theta} \cdot \theta=\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta}(k+1)=\hat{\theta}(k)+\gamma(k+1)\Psi^T(k+1)[\gamma(k+1)-\Psi^T(k+1)\theta(k)]. \quad (7.200)$$

Необхідно відмітити, що математичне очікування вектора нев'язки у точці  $\theta=\hat{\theta}$  буде на кожному кроці дорівнювати нулю.

Коефіцієнт корекції:

$$\gamma(k+1)=\frac{c}{k+1}. \quad (7.201)$$

Недолік МСА-повільна збіжність оцінок  $\hat{\theta}(k)$ , навіть якщо дисперсія  $e(k)$  істотно менше дисперсії  $y(k)$ . Не дивлячись на повільну збіжність оцінок, алгоритми МСА за своєї простоти знаходять застосування в практичних задачах ідентифікації лінійних та нелінійних моделей об'єктів з незалежним адитивним шумом.

## 7.6.5 Порівняння характеристик рекурентних методів ідентифікації.

Подані вище алгоритми рекурентної ідентифікації (РМНК, РУМНК, РМДЗ, РММП, МСА) можуть бути приведені до єдиної форми:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1), \quad (7.202)$$

$$\gamma(k) = \mu(k+1)P(k)\varphi(k+1), \quad (7.203)$$

$$e(k+1) = y(k+1) - \Psi^T(k+1)\theta(k), \quad (7.204)$$

Для різних методів їх описання тільки відрізняється векторами  $\hat{\theta}(k)$ ,  $\Psi(k+1)$  та  $\gamma(k)$ . Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК):

$$\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m],$$

$$\Psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)],$$

$$\mu(k+1) = 1 / (1 + \Psi^T(k+1)P(k)\Psi(k+1)),$$

$$P(k) = 1 / [\Psi^T(k)\Psi(k)]$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k)\Psi^T(k+1)P(k),$$

$$\varphi(k+1) = \Psi(k+1),$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \quad \alpha \gg 1. \quad (7.205)$$

Узагальнений рекурентний метод найменших квадратів (УРМНК):

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n],$$

$$\Psi^T(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n)],$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)P(k)\Psi(k+1)},$$

$$P(k) = 1 / [\Psi^T(k)\Psi(k)], \quad (7.206)$$



$$P(k+1) = I - \gamma(k)\Psi^T(k+1)P(k),$$

$$\varphi(k+1) = \Psi(k+1),$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \alpha \gg 1.$$

Рекурентний метод допоміжних змінних (РМДЗ):

$$\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$$

$$\Psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)],$$

$$\varphi^T(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)],$$

$$h(k) = \varphi^T(k)\theta_b(k),$$

$$\hat{\theta}_b(k) = (1-\beta)\hat{\theta}_b(k-1) + \beta\hat{\theta}(k-\eta), \quad 0.01 \leq \beta \leq 0.1, \quad (7.207)$$

$$\mu(k+1) = 1 / (1 + \Psi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)),$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k)\varphi^T(k+1)P(k),$$

$$\hat{v}(0) = y(0); \hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \alpha \gg 1.$$

Рекурентний метод максимальної правдоподібності (РММП):

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n],$$

$$\varphi^T(k+1) = -y'(k), \dots, -y'(k-n+1), u'(k-d), \dots, u'(k-d-n+1), e'(k), \dots, e'(k-n-1),$$

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_n y'(k-n),$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n),$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_n e'(k-n),$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}, \quad (7.208)$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k) \varphi^T(k+1) P(k),$$

$$\varphi(0) = 0; \theta(0) = 0; P(0) = \alpha I, \alpha \gg 1.$$

Метод стохастичної апроксимації (МСА)

$$\hat{\theta}(k-1) = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m]$$

$$\Psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, +u(k-d-m)],$$

$$\mu(k+1) = I$$

$$P(k+1) = \frac{c}{k+1} \quad (7.209)$$

$$\varphi(k+1) = \Psi(k+1),$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \alpha \gg 1.$$

Якщо параметри об'єкту на інтервалі вимірювань  $k=0 \dots N$  залишались постійними, то вимірювання  $u(k), y(k)$  та похибки  $e(k)$  входять з однаковою вагою, незалежними від  $k$ .

Якщо оцінюються параметри нестационарного об'єкту, новим вимірюванням потрібно надавати більшу вагу, ніж тим, що були раніше, з цього випливає, що повинен бути передбачений механізм забування старих значень.

В МНК він може бути введений шляхом змінення функції втрат (метод експоненціально взважених найменших квадратів):

$$J = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} w(k) e^2(k), \quad (7.202)$$

де  $w(k) = \lambda^{n+d+N-k} 0 < \lambda < 1$ .

В зв'язку з цим формули рекурентних методів (7.202) – (7.209) необхідно змінити:

В знаменнику  $\mu(k+1)$  одиниця замінюється на  $\lambda$ , а матриця  $P(k+1)$  перемножується на  $1/\lambda$ .

Задаючись показником затухання  $\lambda$ , доводиться вибрати між високим ступенем подавлення шуму  $\lambda$  близька до 1 та кращим відслідковуванням параметрів, що змінюються  $\lambda$  менше 1.

Результати дослідів рекурентних алгоритмів дозволяють зробити висновки про такі умови їх використання.

РМНК застосовують для малих відношень інтенсивностей шуму та корисного сигналу. В іншому випадку він дає сильне зміщення оцінок параметрів. Надійна сходиність оцінок потребує відносно не великого об'єму обчислень.

УРМНК – якщо справедлива модель шуму  $D/A$ , він застосовується при більш високих відношеннях шуму до сигналу. Спочатку оцінки зходяться повільно або навіть розходяться. Оцінки фільтру шуму  $D = [d_1, \dots, d_m]$  сходяться повільніше оцінок параметрів об'єкта. Він потребує більшого об'єму обчислень ніж РМНК.

РМДЗ забезпечує достатньо точну оцінку параметрів. Використовується для високих інтенсивностей перешкод та їх кореляції зі змінними об'єкту. Для підшвидчення збіжності оцінок на початковому етапі рекомендується використовувати РМНК; має досить великий об'єм обчислень.

РММП – якщо справедлива модель шуму вигляду  $D/A$ , він забезпечує високу точність оцінок. З початку оцінки зходяться повільно. Розходяться різче, ніж УРМНК. Оцінки фільтру шуму  $D$  зходяться дуже повільно. Потребує більшого об'єму обчислень, ніж УРМНК.

МСА – прийнятна точність досягається при досить великій кількості вимірювань. Збіжність визначається числом  $s$  в (7.209). Об'єм обчислень малий.

За малих об'ємів обчислень та шуму високої інтенсивності усі методи (крім МСА) мають однакову якість оцінок. Перевагу надають РМНК, так як він легше інших та гарантує збіжність. Перевага РММП проявляється для великих об'ємів вибірок.

**Приклад 7.6.** Ідентифікація рекурентним методом найменших квадратів об'єкту з передаточною функцією.

$$W(p) = \frac{2.5}{(p + 0.1)(p^2 + 6p + 25)} \quad (7.211)$$

та “білим” шумом на вході. Програма ідентифікації РМНК:

```

k=2.5;p1=-.1;p2=-3+4*I;p3=-3-4*I;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
tm=5000;dt=.2;
t=0:dt:tm;
n=length(t);
u=100*randn(n,1);
y=laim(wo,u,t);
subplot(2,1,1)grid
plot(t,u),grid
title('Вхідний сигнал')
subplot(2,1,2),grid
plot(t,y),grid
title('Вихідний сигнал')
pause
subplot(1,1,1)
my=mean(y);mu=mean(u);
yc=y-my;
uc=u-mu;
m=3,%Задання розмірності АРСС-моделі
%Задання початкових умов в РМНК
P=1000*eye(2*m,2*m);
Q=zeros(2*m,1);
F=Q;
%Метод РМНК
for i=1:n-m
    F=[-yc(i+m-1:-1:i);uc(i+m-1:-1:i)];
    ch=P*F;
    zn=1+F'*P*F;
    gm=ch/zn;
    P=(eye(2*m)-gm*F')*P;
    Q=Q+gm*(yc(m+i)-F'*Q);
kf(i,1:2*m)=Q';%Коефіцієнти АРСС-моделі
TP(i)=F'*Q;
End
%Помилка ідентифікації та її характеристики
e=yc(m+1:end)-TP';

```

```

de=std(e);
plot(t(1:n-m),kf),grid
pause
sr=[yc(m+1:end),Tp'];
plot(sr),grid
pause
plot(e),grid
%Обчислення передавальної функції об'єкту та його
характеристик
nun=kf(end,m+1:end);
den=[1 kf(end,1:m)];
wod=tf(nun,den,dt)% Обчислення дискретної передавальної функції
об'єкту
won=d2c(wod)%Обчислення передавальної функції об'єкту

```

Подано на вхід об'єкту “білий шум” (рис.7.8.). По отриманому АРСС – моделі були обчисленні дискретна, а по ній виходячи з

співвідношення  $W(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{w(p)}{p}\right\}$  та  $W(p) = P\alpha\left\{\frac{z}{z-1}W(z)\right\}$

непереривна передаточні функції ідентифікованої моделі, яка досить близька до дійсної передаточної функції (7.211).

$$W(z) = \frac{0,0003558(z+3,181)(z+0,2318)}{(z-0,99)(z^2+1,364z+0,5486)}, \quad (7.212)$$

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{1,4801 \times 10^{-6}(p^2 - 34,41p + 1,69 \times 10^6)}{(p+0,1001)(p^2 + 6,004p + 25,01)} \approx \\
 &\approx \frac{2,501}{(p+0,1)(p^2 + 6p + 25)}
 \end{aligned} \quad (7.213)$$

Отримані результати свідчать про ефективність РМНК для ідентифікації лінійних систем за умови великих виборок даних та “білому шумі” на вході.

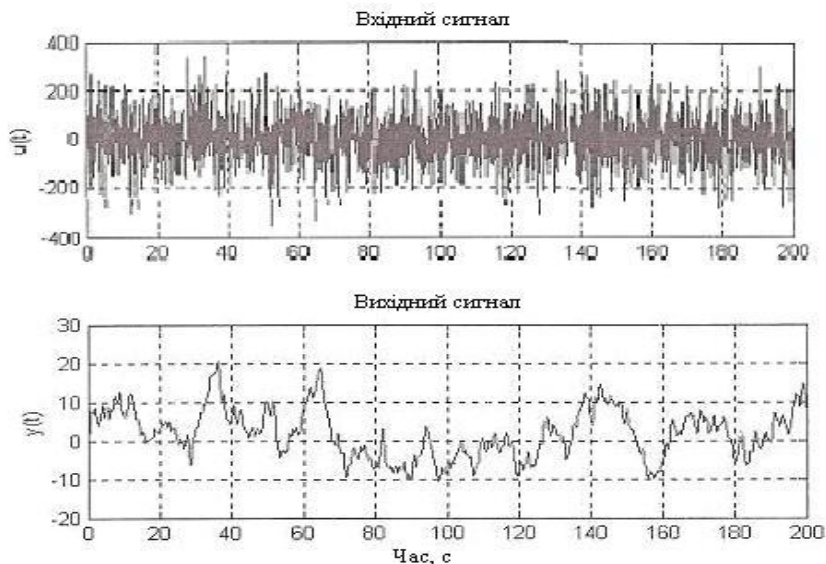


Рис.7.8(а) – вхідний, (б) – вихідний сигнал об'єкта ідентифікації.

*Контрольні запитання:*

- 1) Визначити поняття решітчастої функції та скінченної різниці. Наведіть приклади.
- 2) Сформулювати поняття дискретного перетворення Лапласа. Наведіть приклади.
- 3) Сформулювати поняття Z-перетворення. Наведіть приклади.
- 4) Визначити математичну модель системи з мікропроцесорами.
- 5) Визначити математичну модель дискретної системи об'єкта-цифрового регулятора.
- 6) Сформулювати поняття дискретної стохастичної моделі.
- 7) Надати класифікацію дискретних стохастичних моделей.
- 8) Надати класифікацію математичних моделей на базі матричних операторів.
- 9) Надати поняття функціонального поліному.

- 10) Визначити поняття лінійного оператора.
- 11) Дати визначення імпульсної характеристики системи.
- 12) Сформулювати задачу апроксимації нелінійної системи ортогональними операторами.
- 13) Визначити постановку задачі параметричної ідентифікації дискретних моделей.
- 14) Навести алгоритм ідентифікації методом допоміжних змінних.
- 15) Навести алгоритм ідентифікації методом максимальної правдоподібності.
- 16) Навести алгоритм ідентифікації методом стохастичної апроксимації.
- 17) Порівняйте характеристики рекурентних методів ідентифікації.

*Література до розділу :*

- 1) Мокін Б.І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем: Навчальний посібник. Вінниця, 2010. – 260 с.
- 2) Даджион Д., Мерсеро Р. Цифрова обробка сигналів. – М.:Мир, 1988.- 488с.
- 3) Варіченко Л.В., Лабунець В.Г., Раков М.А.Абстрактні алгебраїчні системи і цифрова обробка сигналів. – К.:Наукова думка, 1986. – 248с.
- 4) Щербаков М.А. Дослідження статистичних ядер Вінера в приватній області// Кібернетика і обчислювальна техніка: Наук. Робота – К.: Наукова думка, 1991. – Вип. 89. – с. 19-26
- 5) Щербаков М.А. Алгоритм обчислення ядер Вінера нелінійних систем в частковій області// Кібернетика і ВТ: Наук.робота – К.: Наукова думка, 1988 – Об. 79 – С.51-58.
- 6) Методи класичної та сучасної ТАУ: Підручник в 3-х т./Під ред. М.Д. Егупова.- М.: Вид-во МГТУ ім. Баумана, 2000. – 736с.
- 7) Schetzen M. The volterra and Wiener theory of nonlinear systems. – New York: John Wiley, 1980. – 527р.
- 8) Ланкастер П. Теорія матриць. М.: Наука, 1978. – 280с.
- 9) Stapleton D.C., Bass S.C. Adaptive noise cancellation for a class of nonlinear, dynamic reference channels// IEEE Trans.on Circuits and Systems. – 1985. – v.35. – 2 – p.143-150

10) Кравченко В.Ф., Рвачев В.А. “Wavelet” – системи та їх застосування в обробці сигналів// Зарубіжна радіоелектроніка.- 1996.- №4 – С.3-20.

11) Piccinbono B., Duvant P. Geometric properties of optimal Volterra filters for signal detection/ IEEE Trans. On Information Theory. – 1990. – V.36 – 5- p. 1061-1068.

12) Ramponi G.F., Sincranza G.L., Ukovich W.A. A computational method for the design 2-D nonlinear Volterra filters// IEEE Trans. On Circuits and Systems. – 1988. – V.35 – 9 – p.1095 – 1102.

13) Даджон Д., Мерсеро Р. Цифрова обробка багатомірних сигналів. – М.: Мир, 1988. – 488с.

14) Frank W.A. An efficient approximation to the quadratic Volterra filter and its application in real-time loudspeaker linearization// Signal processing. – 1995. – V. 45. – 1 – p.97 – 113.

15) Бронштейн І.М., Семендяєв К.А. Довідник з математики для інженерів та вузів. – М. : Наука, 1980. – 576с.



## Розділ 8. Неперервні моделі динамічних систем

### 8.1. Моделі, побудовані на основі законів механіки

Структуру моделей динаміки фізичної системи отримують на основі законів механіки, електрики, гідравліки і термодинаміки та ін. Наприклад, система пружина-маса (рис. 8.1), до якої прикладемо момент  $M_1(t)$ . Припустимо, що пружина має малу масу в порівнянні з диском. Необхідно виміряти момент  $M_2(t)$  маси  $m$ , виходячи із законів механіки. Сума діючих моментів повинна дорівнювати нулю  $M_1(t) = M_2(t)$ . Зовнішній момент  $M_1(t)$ , що прикладено до кінця пружини, передається крізь цей пружний елемент. Різниця кутових швидкостей пружного елемента  $\omega(t) = \omega_2(t) - \omega_1(t)$  характеризує кутову швидкість одного кінця пружного елемента щодо іншого і називається **відносною змінною**. Для пружини і маси, що обертаються без демпфера (рис.8.1) або лінійно переміщуються з демпфером (рис.8.2), в основу моделі покладено закони Ньютона.

У прикладі (рис. 8.2) будемо вважати тертя вантажу об стінки в'язким. Тоді, згідно з другим законом Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = p(t), \quad (8.1)$$

де  $k$  - коефіцієнт пружності пружини,  $b$  - коефіцієнт тертя.

Більшість фізичних систем в малому діапазоні зміни змінних близькі до лінійних. Зі зростанням змінних всі системи стають нелінійними. Так система «маса-пружина» (рис. 8.2.) лінійна і описується рівнянням (8.1) лише для малих відхилень  $y(t)$ .

Якщо до системи в стані спокою докласти збурення  $x_1(t)$ , то на виході з'явиться реакція  $y_1(t)$ . Якщо піддати систему збуренню  $x_2(t)$ , то вона дасть реакцію  $y_2(t)$ . Необхідною умовою лінійності є умова щоб при обуренні  $x_1(t)+x_2(t)$  система мала реакцію  $y_1(t)+y_2(t)$ . Це називають принципом **суперпозиції**.

Для лінійної системи повинен виконуватися фактор масштабування: при множенні вхідної змінної на константу  $\beta$  вихідна змінна системи дорівнювала б  $\beta^*y$ . Цю властивість називають гомогенністю.

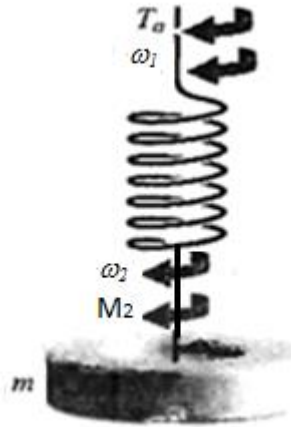


Рис.8.1 Об'єкт «пружина-маса», що обертається

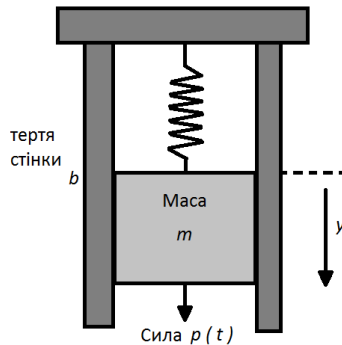


Рис.8.2 Об'єкт «пружина-маса», що рухається

Система  $y=x_2$  не є лінійною, тому що для неї не виконується принцип суперпозиції. Система  $y=mx+b$  не гомогенна. Проте в

околиці робочої точки  $x_0, y_0$  щодо малих відхилень  $\Delta x$  і  $\Delta y$  можна вважати лінійною. Якщо  $x = x_0 + \Delta x$  і  $y = y_0 + \Delta y$ , то  $\Delta y = m\Delta x$  задовольняє необхідні умови лінійності.

Нехай певний елемент характеризується збуренням  $x(t)$  і реакцією на нього  $y(t)$ :

$$y(t) = f[x(t)], \quad (8.2)$$

Безперервну функцію  $f$  в околиці робочої точки  $x_0$  можна розкласти в **ряд Тейлора**:

$$y = f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} * \frac{(x-x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} * \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots \quad (8.3)$$

Значення похідної  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$  характеризує нахил дотичної до функції  $y = f(x)$  в робочій точці  $x_0$ . Ця дотична є апроксимацією кривої  $f(x)$  у випадку малих значень  $(x-x_0)$  відхилення від робочої точки:

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) = y_0 + \beta(x-x_0), \quad (8.4)$$

де  $\beta$ - тангенс кута нахилу дотичної до кривої в робочій точці. Рівняння (8.4) можна записати відхиленнях:

$$\Delta y = \Delta x. \quad (8.5)$$

Нехай вантаж маси  $m$  розташовано на пружині. Робоча точка відповідає стану рівноваги, коли пружна сила пружини дорівнює вазі вантажу  $mg$ , де  $g$ - прискорення сили тяжіння:  $F_0 = mg$  (рис.8.2). Якщо пружина має залежність  $F=y^2$ , то в положенні рівноваги  $y_0 = \sqrt{mg}$ . Лінійна модель для малих відхилень:

$$\Delta F = \beta \Delta y = \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y_0} \Delta y = 2y_0 * \Delta y. \quad (8.6)$$

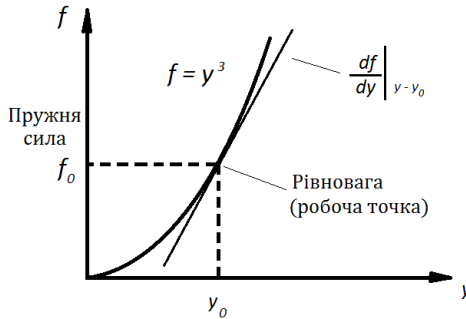


Рис. 8.3. Залежність пружної сили від  $y$ .

Якщо змінна у залежить від декількох збурень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то при лінеаризації беруться перші члени кратного ряду Тейлора (1.7):

$$y = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x=x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x=x_0} (x_2 - x_{20}) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x=x_0} (x_n - x_{n0}). \quad (8.7)$$

Розглянемо коливання маятника (рис. 8.4 (а)). Момент, що діє на масу, дорівнює:

$$M = mgL \sin \theta, \quad (8.8)$$

де  $g$  - прискорення сили тяжіння. Умова рівноваги маятника  $\theta_0 = 0^\circ$ . Нелінійну залежність між  $T$  і  $\theta$  представлено на рис. 8.4 (б). Обчислимо похідну в точці рівноваги. Тоді

$$T - T_0 \approx MgL \left. \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \quad (\theta = \theta_0),$$

де  $T_0=0$ ,  $\theta_0=0$ , отже,

$$T = MgL(\cos^\circ)(\theta - 0^\circ) = MgL\theta. \quad (8.9)$$

Лінійна модель (8.9) в діапазоні  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$  відрізняється всього на 2% від дійсних коливань маятника.

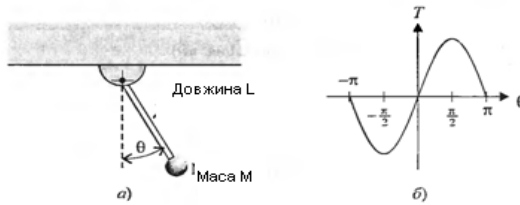


Рис. 8.4. Коливання маятника

Розглянемо більш складну механічну систему (рис.8.5). Рівняння руху механічної системи в просторі зображень по Лапласу за нульових початкових умов, отримано на підставі складання сил, що діють на елементи системи:

$$m_1 s V_1(s) + (b_1 + b_2) V_1(s) - b_1 V_2(s) = p(s), \quad (8.10)$$

$$m_2 s V_2(s) + b_1 [V_2(s) - V_1(s)] + k \frac{V_2(s)}{s} = 0,$$

або

$$[m_1 s + (b_1 + b_2)] V_1(s) - b_1 V_2(s) = p(s), \quad (8.11)$$

$$-b_1 V_1(s) + (m_2 s + b_1 + \frac{k}{s}) V_2(s) = 0,$$

де  $s$ -змінна Лапласа.

Рівняння (8.11) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} m_1 s + b_1 + b_2 & -b_1 \\ -b_1 & m_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

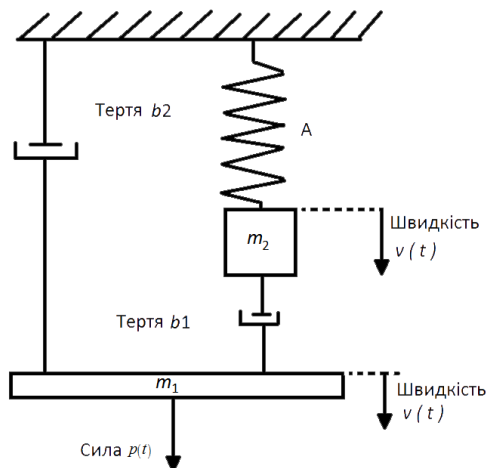


Рис. 8.5. Механічна система з двома масами

Вважаючи, що вихідна змінна - це швидкість руху маси  $m_1$ , за допомогою обернення матриці отримаємо:

$$V_1(s) = \frac{(m_2 s + b_1 + k / s) p(s)}{(m_1 s + b_1 + b_2)(m_2 s + b_1 + k / s) - b_1^2}. \quad (8.13)$$

Передаточна функція системи:

$$W(s) = \frac{V_1(s)}{p(s)} = \frac{(m_2 s^2 + b_1 s + k)}{(m_1 s + b_1 + b_2)(m_2 s^2 + b_1 s + k) - b_1^2 s}. \quad (8.14)$$

Якщо за вихідну змінну прийняти переміщення  $x_1(t)$ , то

$$\frac{X_1(s)}{p(s)} = \frac{V_1(s)}{sp(s)} = \frac{W(s)}{s}. \quad (8.15)$$

## 8.2. Моделі, побудовані на основі законів електромеханіки

### 8.2.1. Передаточна функція двигуна постійного струму, як виконавчого елемента в системах бортової автоматики літальних апаратів

Електродвигун (рис. 8.6) перетворює електричну енергію в механічну енергію обертального руху. Завдяки високому обертаючому моменту, можливості регулювання швидкості в широкому діапазоні, компактності, хорошим характеристикам навантаження, двигуни постійного струму широко застосовуються в роботах-маніпуляторах, стрічкопротяжних механізмах, дисководів, в машинобудуванні та виконавчих пристроях слідкуючих систем.

Двигуни цього типу здатні створювати високий момент за малого моменту інерції ротора. Значення механічної постійної часу 15 мс.

Передаточну функцію двигуна отримаємо шляхом лінійної апроксимації реальних характеристик. Вхідна керуюча напруга може бути подана на обмотку збудження або на якір. Якщо відсутнє насичення, то магнітний потік  $\Phi$  у повітряному зазорі буде пропорційний струму збудження  $i_f$ :

$$\Phi = K_f i_f. \quad (8.16)$$

Момент, що розвивається двигуном:

$$M_m = K_1 \Phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t) \quad (8.17)$$

Якщо двигун, керований по колу збудження, то перетворюючи (2.17) по Лапласа, отримаємо:

$$M_m(s) = (K_1 \Phi I_a) I_f(s) = K_m I_f(s), \quad (8.18)$$

де  $i_a = I_a$  струм якоря, а  $K_m$  носить назву постійної електродвигуна. Струм збудження пов'язаний з напругою збудження  $U_f$  законами електрики

$$U_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s), \quad (8.19)$$

де  $R_f$ — опір,  $L_f$ — індуктивність обмотки збудження.

Момент, що розвиває двигун прикладається до навантаження:

$$M_m(s) = M_L(s) + M_d(s), \quad (8.20)$$

де  $M_L(s)$ ,  $M_d$  — динамічний та статичний моменти навантаження

$$M_L(s) = J s^2 \theta(s) + b s \theta(s). \quad (8.21)$$

З виразів (8.18) - (8.20) отримаємо:

$$M_L(s) = M_m(s) + M_d(s), \quad (8.22)$$

$$M_m(s) = K_m I_f(s), \quad (8.23)$$

$$I_f(s) = \frac{U_f(s)}{R_f + L_f s}, \quad (8.24)$$

Передавальна функція двигуна «вхід напруга  $U_f$  - вихід кут  $\theta$  »:

$$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m / J L_f}{s(s + b/J)(s + R_f / L_f)}, \quad (8.25)$$

або

$$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = G(s) = \frac{K_m / b R_f}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)}, \quad (8.26)$$

де  $\tau_f = L_f / R_f$  і  $\tau_L = J / b$ .



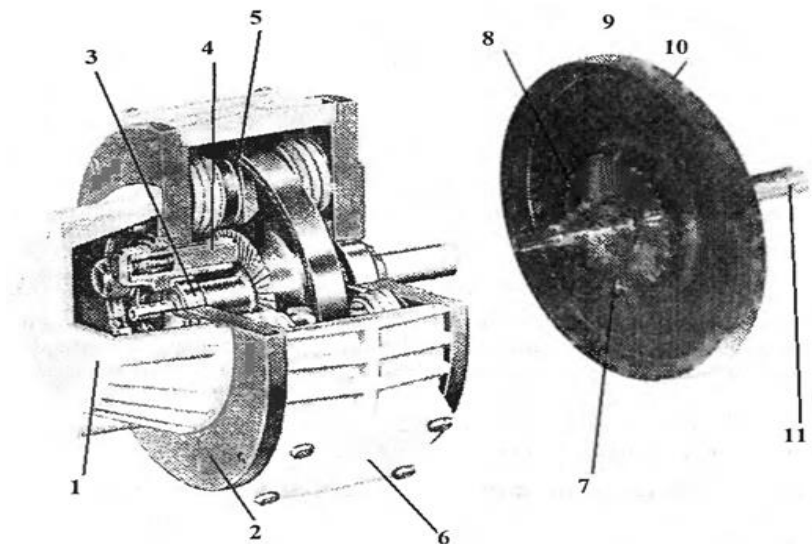


Рис. 8.6. Двигун постійного струму плоскої конструкції з постійними магнітами.

1 - захисна алюмінієва кришка, 2 - плоска форма, що забезпечує компактність конструкції, 3 - підшипники, 4 - щітки, 5 - постійні магніти зі сплаву Алніко, які забезпечують високе відношення «потужність / вага», 6 - примусова вентиляція, 7 - обмотка, 8 - мідний колектор, 9 - якір, 10 - тарілчаста форма якоря, що забезпечує малий момент інерції, 11 – вал.

Якщо  $\tau_L > \tau_f$  то постійною часу обмотки збудження можна знехтувати. Структурна схема двигуна, керованого по колу збудження, наведено на рис. 8.7. Момент, що розвивається двигуном пропорційний добутку струму  $I_a$  якоря на струм  $I_f$  збудження :

$$M_m(s) = (K_1 K_f I_f) I_a(s) \quad . \quad (8.27)$$

Якщо використано постійні магніти, то момент двигуна буде пропорційний струму  $I_a$  якоря:

$$M_m(s) = K_m I_a(s),$$

де  $K_m$  - коефіцієнт, що залежить від магнітної проникності сталюого осереддя. Струм у колі якоря пов'язано з напругою за II законом Кірхгофа:

$$U_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + E_b(s), \quad (8.28)$$

де  $E_b(s)$  – проти - ЄДС, яка пропорційна швидкості  $\omega$  обертання:

$$E_b(s) = K_b \omega(s), \quad (8.29)$$

З (8.28) визначимо  $I_a$ , як функцію від  $U_a$ ,  $\omega$ :

$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - K_b \omega(s)}{R_a + L_a s} \quad (8.30)$$

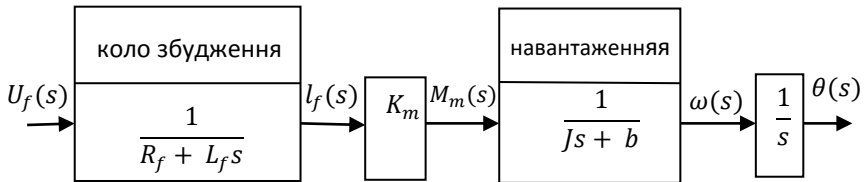


Рис. 8.7. Модель двигуна, керованого струмом збудження.

З рівнянь (8.21) - (8.22) отримаємо вираз для моменту навантаження:

$$M_L(s) = J s^2 \theta(s) + b s \theta(s) = M_m(s). \quad (8.31)$$

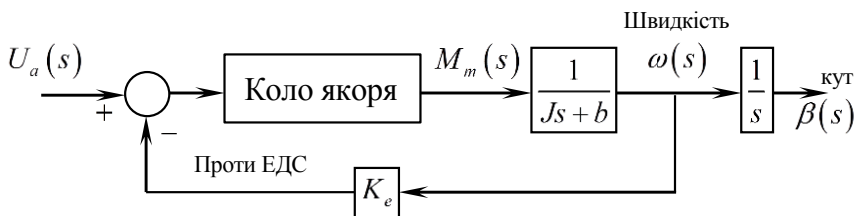


Рис. 8.8. Модель двигуна, керованого струмом якоря

Зв'язок між змінними двигуна, керованого по колу якоря, показано на рис. 8.8. З рівнянь (8.27), (8.30) і (8.31) (або за структурною схемою) отримаємо передаточну функцію двигуна:

$$W(s) = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]} = \quad (8.32)$$

$$= \frac{K_m}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

Якщо постійною часу якоря  $\tau_1 = L_a / R_a$  можна знехтувати, то

$$W(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[R_a(Js + b) + K_b K_m]} = \quad (8.33)$$

$$= \frac{K_m / (R_a b + K_b K_m)}{s(\tau_1 s + 1)},$$

де еквівалентна постійна часу  $\tau_1 = R_a J / (R_a b + K_b K_m)$ .

### 8.2.2. Передаточна функція гідравлічного приводу рульових машинок літальних апаратів

Для лінійного переміщення маси  $m$  може бути використано гідравлічний пристрій. Рідина подається від джерела під постійним тиском і її стискальність можна знехтувати. Переміщення  $x(t)$  золотника вниз, призводить до подачі рідини у верхню частину гідроциліндра і тоді поршень переміщається вниз. Мала сила, необхідна для переміщення  $x(t)$ , перетворюється у велику силу,

пов'язану з переміщенням поршня  $y(t)$ . Об'ємна витрата рідини  $Q$  залежить від переміщення  $x(t)$  і різниці тисків, що діють на поршень, тобто  $Q = g(x, P)$ . Скориставшись методом лінеаризації, запишемо:

$$Q = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, P_0} \times x + \left( \frac{\partial g}{\partial P} \right)_{x_0, P_0} \times P = k_x x - k_p P, \quad (8.34)$$

де  $(x_0, P_0)$  - координати робочої точки. Сила, що розвивається поршнем гідроциліндра, дорівнює добутку його площі  $A$  на тиск  $P$ :

$$AP = m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt}. \quad (8.35)$$

Підставляючи (8.34) в (8.35), отримаємо

$$\frac{A}{k_p} (k_x x - Q) = m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt}. \quad (8.36)$$

Окрім того, об'ємна витрата рідини пов'язана з переміщенням поршня:

$$Q = A \frac{dy}{dt}. \quad (8.37)$$

Підставляючи (8.37) в (8.36), отримаємо:

$$\frac{Ak_x}{k_p} x = m \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (8.38)$$

Тоді, скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо передавальну функцію, що зв'яже переміщення  $x(t)$  золотника з переміщенням  $y(t)$  поршня:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \quad (8.39)$$

$$\text{де } K = \frac{Ak_x}{k_p} \text{ і } B = b + \frac{A^2}{k_p}.$$

За структурою передаточна функція (8.39) гідравлічного виконавчого пристрою збігається з передаточною функцією (8.33) електродвигуна. Подамо (табл.8.1.), як приклад, передаточні функції широко відомих пристроїв систем автоматики літальних апаратів (ЛА).

### 8.3. Моделі у вигляді структурних схем об'єктів ідентифікації та систем управління ними.

У теорії ідентифікації та управління часто використовують представлення систем у вигляді структурних схем. Структурні схеми складаються з ланок спрямованої дії, кожній з яких відповідає певна передаточна функція. На рис. 8.9. зображено структурна схема двигуна постійного струму, керованого по колу збудження, яка відображає зв'язок між кутом повороту  $\theta(s)$  і напругою  $U_f(s)$ .

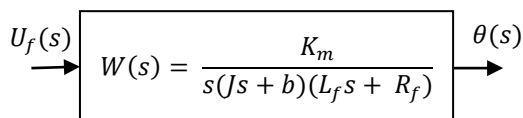
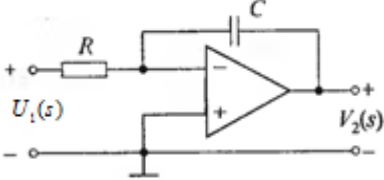
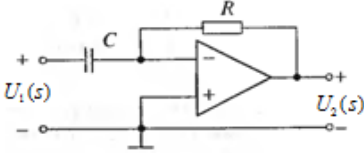
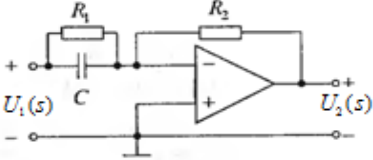


Рис. 8.9. Структурна схема двигуна постійного струму

Таблиця 8.1.

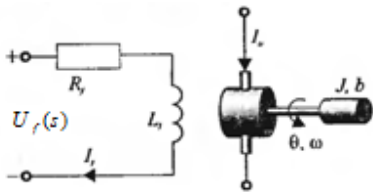
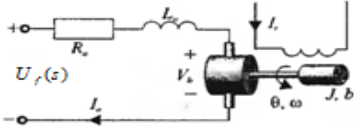
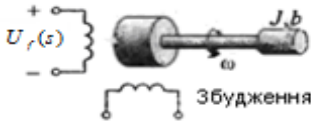
#### Передаточні функції динамічних елементів

Елемент	Передаточна функція
1. Інтегруюча ланка, яку реалізовано на операційному підсилювачу (ОП)	$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$

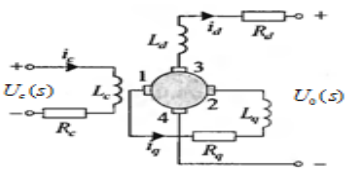
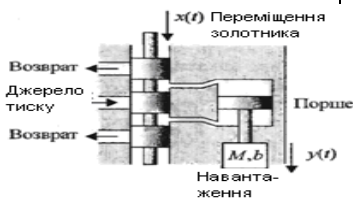
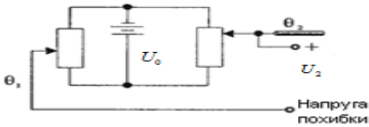
	
<p>2. Диференціююча ланка на ОП</p> 	$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -RC * S$
<p>3. Пропорційно диференціююча ланка на ОП</p> 	$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1}$

Продовження таблиці 8.1. .

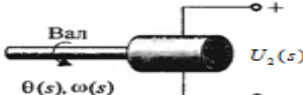
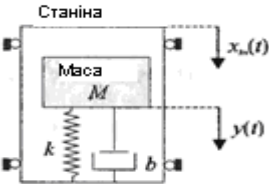
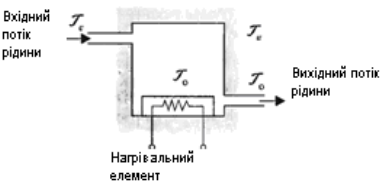
Елемент	Передаточна функція
---------	---------------------

<p>4. Двигун постійного струму з управлінням по колу збудження</p> 	$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js+b)(L_f s + R_f)}$
<p>5. Двигун постійного струму з управлінням по колу якоря</p> 	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js+b) + K_b K_m]}$
<p>6. Двухфазовий двигун змінного струму</p> 	$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}$ $\tau = J/(b - m)$ <p><math>K_m</math> — нахил лінеаризованної залежності швидкості від моменту</p>

Продовження таблиці 8.1.

Елемент	Передаточна функція
<p>7. Електромашинний підсилювач систем бортової автоматики ЛА</p> 	$\frac{U_o(s)}{U_c(s)} = \frac{(K / R_c R_q)}{(s \tau_c + 1)(s \tau_q + 1)}$ $\tau_c = L_c / R_c, \tau_q = L_q / R_q$ <p>В режимі холостого ходу</p> $i_d \approx 0, \tau_c \approx \tau_q$ $0,05 c < \tau_c < 0,5 c, U_{12} = U_q, U_{34} = U_d$
<p>8. Гідравлічний виконуючий пристрій руля машинка ЛА</p> 	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(ms + B)}$ $K = \frac{A k_x}{k_p}, B = \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right)$ $k_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right _{x_0}, k_p = \left. \frac{\partial g}{\partial P} \right _{P_0}$ <p><math>g = g(x, P) = \text{потік}</math></p> <p><math>A</math> – площа поршня</p>
<p>9. Потенціометрична схема формування похибки системи стабілізації кута <math>\theta</math> ЛА</p> 	$U_2(s) = k_s (\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $U_2(s) = k_s \theta_e(s)$ $k_s = \frac{U_0}{\theta_{\max}}$



<p>10. Тахогенератор – датчик кутової швидкості обертання кута <math>\theta</math></p> 	$U_2(s) = K_t \omega(s) = K_t s \theta(s)$ $K_t = \text{const}$
<p>11. Акселерометр – датчик перевантаження ЛА</p> 	$x_0(t) = y(t) - x_m(t)$ $\frac{X_0(s)}{X_m(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + (b/m)s + k/m}$ <p>для низкочастотных колебаний.</p> <p>де <math>\omega &lt; \omega_n</math>,</p> $\frac{X_0(j\omega)}{X_m(j\omega)} \approx \frac{\omega^2}{k/m}$
<p>12. Система підігріву рідини</p> 	$\frac{T(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_1 s + (QS + 1/R)}$ , де <p><math>T = T_0 - T_e</math> – різниця температур</p> <p><math>C_1</math> – теплоємність</p> <p><math>Q</math> – витрата рідини = const</p> <p><math>S</math> – питома теплоємність води</p> <p><math>R</math> – тепловий опір ізоляції</p> <p><math>q(s)</math> – теплова потужність нагрівального елемента</p>

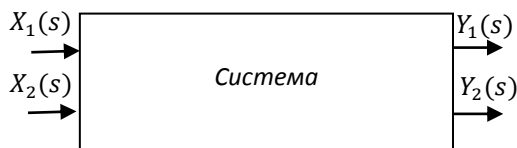


Рис. 8.10. Система з двома входами і двома виходами

У загальному випадку для моделі системи з декількома керованими змінними використовується структурна схема з перехресними зв'язками. У системі (рис. 8.10) є дві входних і дві вихідних змінних. За допомогою передаточних функцій можна записати зв'язуючі їх рівняння:

$$Y_1(s) = W_{11}(s)X_1(s) + W_{12}(s)X_2(s), \quad (8.40)$$

$$Y_2(s) = W_{21}(s)X_1(s) + W_{22}(s)X_2(s), \quad (8.41)$$

де  $W_{ij}(s)$  - передаточна функція від  $j$ -го входу до  $i$ -го виходу. У загальному випадку, за наявності  $n$  входів і  $m$  виходів можна записати в матричній:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ G_{21}(s) & \dots & G_{2n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}, \quad (8.42)$$

або векторно-матричній формі

$$Y = W * X, \quad (8.43)$$

де  $Y$  і  $X$  - матриці-стовпці, елементами яких є відповідних і  $n$  входних змінних, а  $W$  - матрична передаточна функція розмірності  $m * n$ .

Далі розглядаємо приклади систем типу «об'єкт - регулятор», де для вибору оптимального регулятора необхідно знати математичну модель об'єкта передавальну функцію. Структуру її визначають, виходячи з законів фізики, а параметри слід уточнити шляхом вирішення задачі ідентифікації.

### Приклад 8.1. Система зчитування інформації з диска

Задача управління дисководом: позиціонувати зчитувальну голівку точно на задану доріжку і забезпечити перехід від однієї доріжки до іншої в межах 10 мс.

Для приведення в дію важеля голівки, що зчитує, використовується двигун з постійними магнітами.

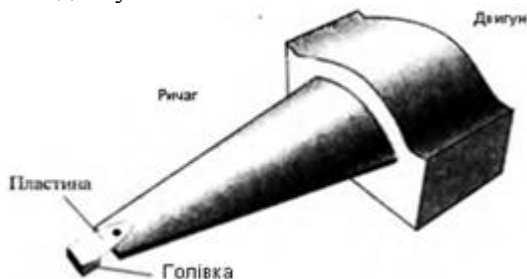


Рис. 8.11 Зчитувальна голівка дисковода

Голівку зчитування закріплено на ковзному елементі, закріпленому на важелі (рис. 8.11). Гнучка пластина дає можливість голівці плавати над диском із зазором менше 100 нм. Тонкоплівкова голівка сприймає магнітний потік і формує сигнал, що поступає на підсилювач. Сигнал помилки (рис. 8.12. (а)) формується на підставі заданого розміру доріжки. Можна вважати, що передаточна функція датчика  $H(s) = 1$  (рис. 8.12 (б)), лінійного підсилювача  $K_m$ . Двигун, керований по колу якоря, представлено моделлю (табл. 8.1., п.6).

Отже,

$$W(s) = \frac{K_m}{s(Js + b)(Ls + R)}, \quad (8.44)$$

або

$$W(s) = \frac{K_m / bR}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)}, \quad (8.45)$$

де  $\tau, \tau_L$  і  $K_m / bR$  підлягають визначенню методами ідентифікації. Оскільки  $\tau \ll \tau_L$ , можна знехтувати величиною  $\tau$ . Тоді визначають тільки дві невідомі (5 і 20).

$$W(s) \approx \frac{K_m / bR}{s(\tau_L s + 1)} = \frac{5}{s(s + 20)}. \quad (8.46)$$

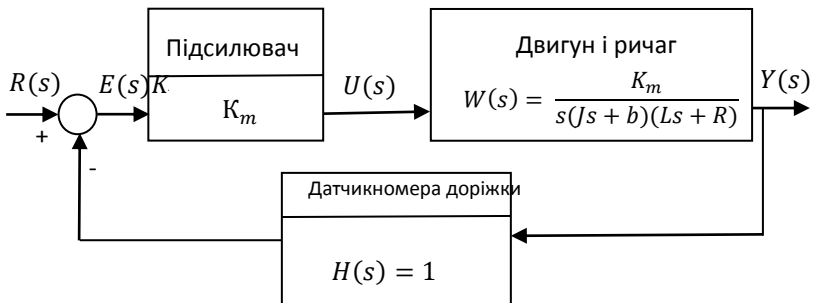


Рис. 8.12. Структурна схема зчитування системи дисководу

### Приклад 8.2. Автономний самохідний лунохід

Самохідний апарат (рис. 8.13) з живленням від сонячних батарей може управлятися за допомогою команд  $x(t)$ . Система управління може бути розімкненою або замкненою.

Розімкнута система має передаточну функцію :

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (8.47)$$

замкнута система - відповідно :

$$W_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0 + K}, \quad (8.48)$$

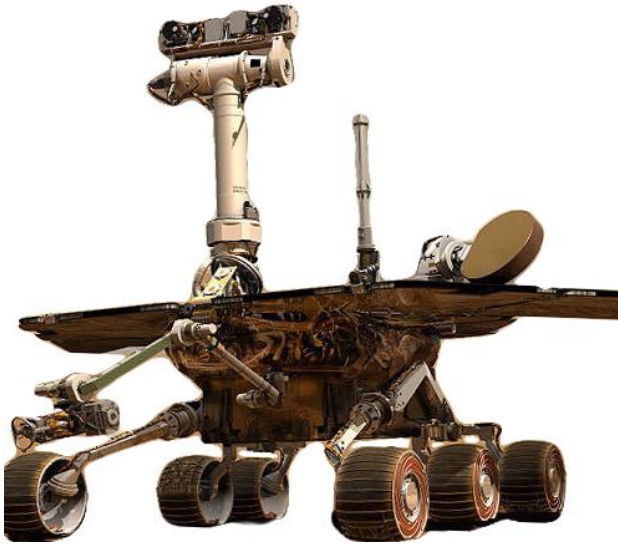


Рис.8.13. Лунохід

Для бажаного рівня якості керування необхідно визначити і періодично уточнювати змінні від часу і обставин три параметри:  $K, a_1, a_0$ .

### **Приклад 8.3. Система управління кутом крену літака.**

Скористаємося спрощеною моделлю динаміки літака у вигляді передавальної функції, що зв'язує відхилення елеронів  $\delta_e$  і кут  $\varphi$  крену літака (рис.8.14 (а)). На рис. 8.14 (б) зображена замкнута система управління положення літака в повітрі, мета якої полягає у підтримці кута крену  $\varphi$ , близького до  $\varphi_a$ , в умовах непередбачених зовнішніх збурень. Два апіорні параметри 11,4 і 1,4 моделі літака слід уточнювати в польоті за допомогою методів ідентифікації, бо вони можуть суттєво змінюватись.

### **Приклад 8.4.**

Для виконання астрономічних спостережень на орбіту виводиться космічний телескоп. Система управління наведенням повинна володіти точністю 0,01 кутової хвилини і стежити за рухом об'єктів зі швидкостями до 0,21 кутової хвилини в секунду. Космічний телескоп зображено на рис. 8.15 (а), а структурна схема системи - на рис. 8.15 (б).

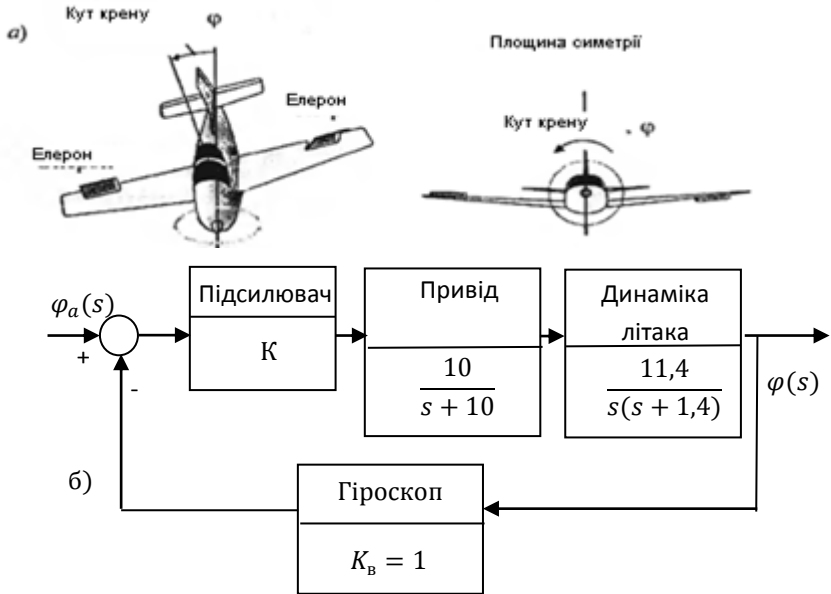


Рис. 8.14. (а) Управління кутом крену літака за допомогою елеронів; (б) Автопілот, керуючий кутом крену.

Ідентифікації підлягає або  $K_1$  або всі коефіцієнти замкненої системи з передавальною функцією

$$W_s(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1},$$

де  $b_0 = K_1 K_2$ ,  $b_1 = K_2 \tau$ ,  $a_1 = \tau_1$ ,  $a_2 = (K_1, K_2)^{-1}$ ,  $a_3 = \tau_2 (K_1, K_2)^{-1}$

### Приклад 8.5. Безпілотна модель літака з автопілотом

Для утримання моделі літака на заданому курсі і висоті використовується автопілот. Структурна схема системи управління

(рис. 8.16). включає регулятор  $W(s)$ , параметри якого залежать від моделі літака. Останні підлягають ідентифікації для адаптації параметрів регулятора.

### Приклад 8.6. Система керування ракетою

На рис. 8.17. зображено структурну схему системи управління швидкістю ракети з ПІ-регулятором, параметри якого залежать від змінних у часі параметрів ракети. Для забезпечення стійкості і якості замкненої системи необхідна ідентифікація параметрів (100,2) ракети.

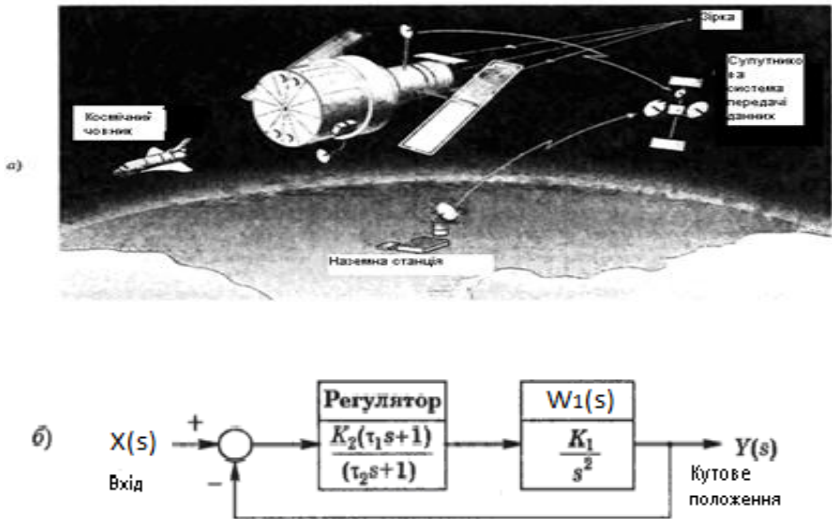
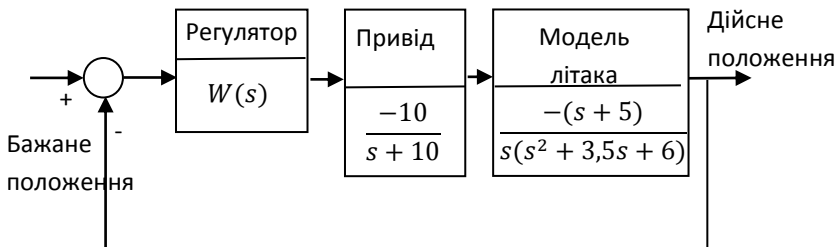


Рис. 8.15. (а) Космічний телескоп. (б) Система управління наведенням телескопа



### 8.16. Структурна схема системи управління з автопілотом.

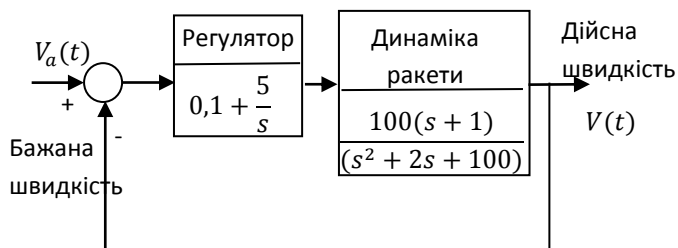


Рис. 8.17. Система управління швидкістю ракети

### Приклад 8.7. Літак з вертикальним злетом

На рис. 8.18 (а) зображено літака з вертикальним злетом, який забезпечується чотирма двигунами, що обертаються навколо горизонтальної осі. Структурну схему системи управління висотою підйому літака наведено на рис.8.18 (б).

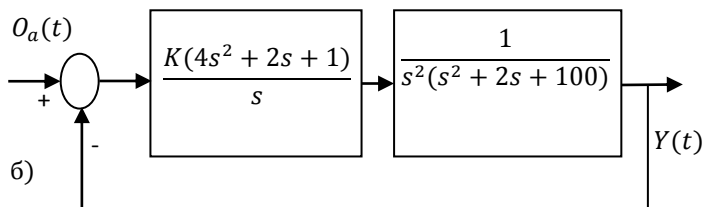
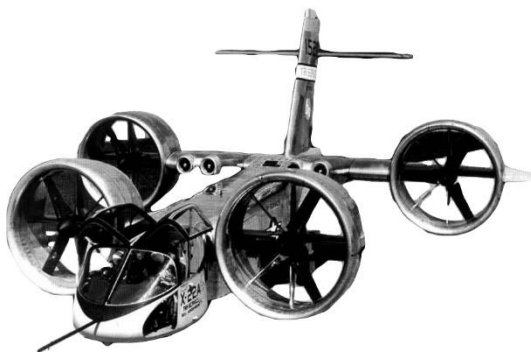




Рис.8.18.(а) Літак з вертикальним злетом;(б) Система управління.

Передаточна функція літака при вертикальному злеті має два нульових і два комплексних корені,

$$W(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2s + 100)}, \quad s_{1,2} = 0, s_{3,4} \cong -1 \pm j10$$

Тобто літак нестійкий і сильно коливальний. Для стабілізації режиму вертикального злету необхідна ідентифікація.

### Приклад 8.8. Реактивний винищувач

На рис. 8.19. зображено багатоцільовий реактивний винищувач і його структурну схему управління за кутом атаки, де ідентифікації підлягають аеродинамічні коефіцієнти (АДК) літака.

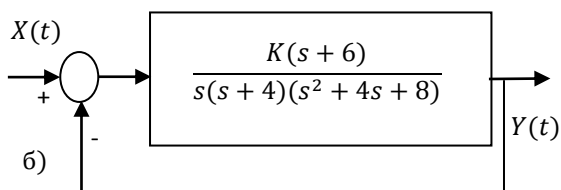
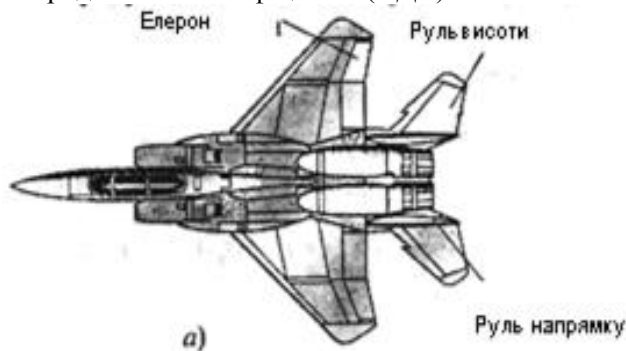


Рис. 8.19. (а) Багатоцільовий винищувач; (б) Структурна схема системи управління кутом атаки.

### Приклад 8.9. Вертоліт з вантажем на тросі

На рис. 8.20 (а) зображено вертоліт з вантажем на тросі. На рис.8.20 (б) наведено структурну схему системи керування положенням вантажу, де візуальний зворотній зв'язок здійснюється пілотом, представленим передавальною функцією  $H(s)$ . Параметри передавальних функцій як вертольоту, так і пілота можуть суттєво змінюватись, що приводить до зміни коренів передавальної функції замкненої системи «пілот-вертольот» і, як наслідок, коивальності системи, а то і стійкості системи.

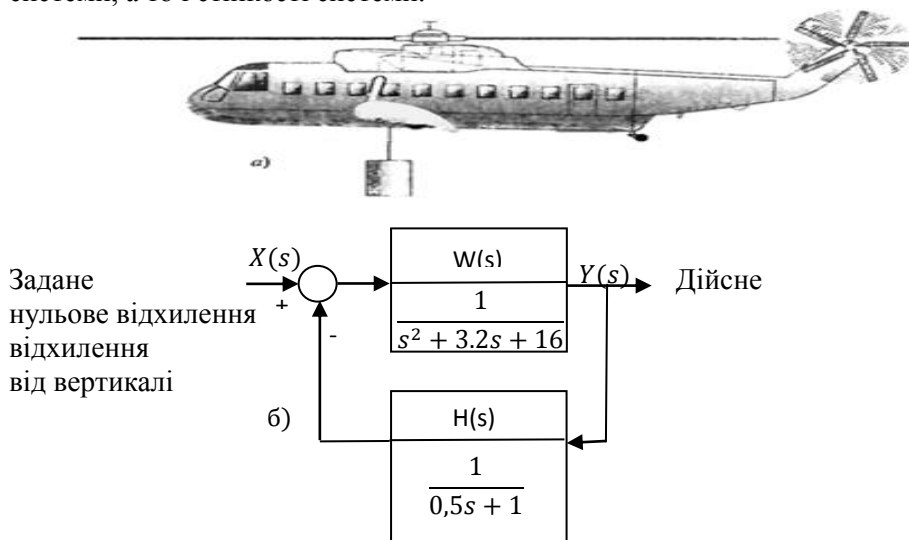


Рис. 8.20. Система управління вертольотом, який переносить вантаж.

### Приклад 8.10.

Космічний човник (рис.8.21 (а)), служить для доставки на орбіту корисного вантажу і поверненню його на землю. Човник, що важить без вантажу близько 75 т, оснащено елеронами в задній частині крил і гальмівним двигуном в хвості, за допомогою яких здійснюється управління його польотом. На рис.8.21 (б) наведено структурну схему системи керування швидкістю зниження. Передаточна функція човника має вигляд

$$W(s) = \frac{0,30(s + 0,05)(s^2 + 1600)}{(s^2 + 0,05s + 16)(s + 70)},$$

але її параметри суттєво змінюються в функції висоти  $H$ , швидкості  $\Psi$  та маси палива. Для забезпечення безпеки посадочного режиму необхідна поточна ідентифікація  $W(s)$  і відповідна корекція передавальної функції  $W_1(s)$  регулятора. При цьому, для коректної задачі ідентифікації необхідно спростити передавальну функцію  $W(s)$ .

Як бачимо існує безліч об'єктів ідентифікації. Це об'єкти, що змінюють свої параметри в процесі роботи. Для забезпечення бажаної якості керування ними виникає необхідність в ідентифікації їх передаточних функцій.

а)

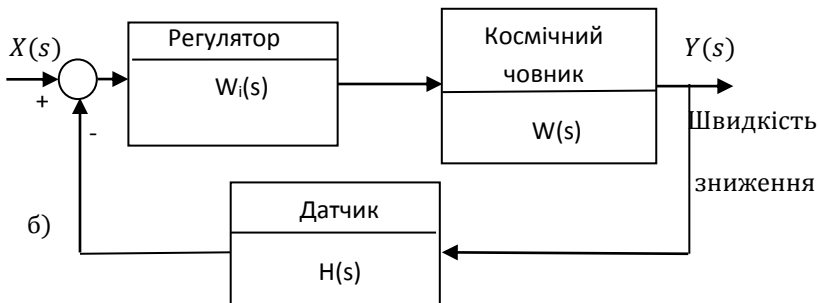
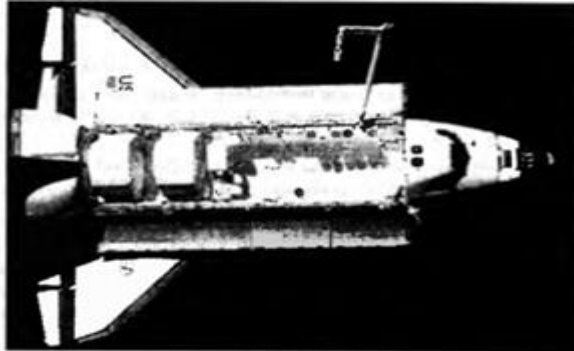


Рис. 8.21.(а) Фото космічного човника;(б) Структурна схема системи керування швидкістю зниження.

#### 8.4. Спрощення передаточних функцій

Складні системи, передаточні функції яких мають високий порядок, доцільно вивчати, використовуючи їх апроксимацію моделями зниженого порядку, що особливо важливо в задачі ідентифікації і адаптивного керування.

Існує декілька методів зниження порядку передаточних функцій. Порівняно простим способом є видалення неіснуючих полюсів, які мають достатньо велику від'ємну дійсну частину і слабо впливають на вид перехідної характеристики. Наприклад, якщо система має передаточну функцію

$$W(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)},$$

то безболісно можна знехтувати полюсом  $s = -30$ . Однак ми повинні зберегти коефіцієнт передачі системи на нульовій частоті, тому нова передаточна функція буде мати вигляд

$$W(s) = \frac{K/30}{s(s+2)}.$$

Більш точний метод полягає в тому, що частотну характеристику системи зниженого порядку намагаються підігнати якомога ближче до частотної характеристики системи високого порядку. Нехай система високого порядку описується передаточною функцією

$$W(s) = K \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1}, \quad (8.49)$$

всі полюси якої знаходяться в лівій половині  $s$ -площини і  $m \leq n$ . Апроксимуюча передавальна функція зниженого порядку має вигляд :

$$\hat{W}(s) = K \frac{c_p s^p + \dots + c_1 s + 1}{d_g s^g + \dots + d_1 s + 1} = k \frac{C_1(s)}{D_1(s)}, \quad (8.50)$$

де  $p \leq g < n$ . Коефіцієнт  $K$  - один і той же для початкової та апроксимуючої передаточних функцій, що необхідно для збігу властивостей систем в сталому режимі. Метод засновано на підборі  $C_1$  і  $D_1$  так, щоб частотна характеристика для  $\hat{W}(s)$  була якомога ближче до частотної характеристики для  $W(s)$ . Це еквівалентно твердженню, що відношення  $W(j\omega)/\hat{W}(j\omega)$  повинно на всіх частотах якомога менше відрізнятися від одиниці. Коефіцієнти  $C_1$  і  $D_1$  визначаються за допомогою таких виразів:

$$M^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} M(s) \quad (8.51)$$

і

$$\Delta^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \Delta(s), \quad (8.52)$$

де  $M(s)$  і  $\Delta(s)$  є, відповідно, поліноми в чисельнику і в знаменнику дробу  $W(j\omega)/\hat{W}(j\omega)$ . Введемо позначення :

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^{(k)}(0) M^{(2k-q)}(0)}{k!(2k-q)!}, \quad q=0,1,2 \dots, \quad (8.53)$$

аналогічний вираз для  $\Delta_{2q}$ . Коефіцієнти  $C_1$  і  $D_1$  визначаються з умови

$$M_{2q} = \Delta_{2q}, \quad (8.54)$$

де  $q = 1, 2, \dots$  і т.д. до числа, необхідного для визначення всіх невідомих коефіцієнтів.

### Приклад 8.11. Спрощення передаточної функції.

Розглянемо систему третього порядку:

$$W(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{1 + (11/6)s + s^2 + (1/6)s^3}. \quad (8.55)$$

Скориставшись моделлю другого порядку

$$\hat{W}(s) = \frac{1}{1 + d_1s + d_2s^2}, \quad (8.56)$$

запишемо:

$$M(s) = 1 + d_1s + d_2s^2 \quad \text{і} \quad \Delta(s) = 1(11/6)s + s^2 + (1/6)s^3.$$

Тоді

$$M^0(s) = 1 + d_1s + d_2s^2, \quad (8.57)$$

і  $M_0(0) = 1$ . Аналогічно отримаємо

$$M^1 = \frac{d}{ds}(1 + d_1s + d_2s^2) = d_1 + 2d_2s, \quad (8.58)$$

Таким чином,  $M_1(0) = d_1$ . Продовжуючи цей процес, для  $M_i$  для  $\Delta$  отримаємо:

$$\begin{aligned} M^0(0) &= 1, & \Delta^0(0) &= 1, \\ M^1(0) &= d_1, & \Delta^1(0) &= 1/16, \\ M^2(0) &= 2d_2, & \Delta^2(0) &= 2, \\ M_3(0) &= 0, & \Delta^3(0) &= 1, \end{aligned} \quad (8.59)$$

Тепер прирівняємо  $M_2q = \Delta_2q$  для  $q = 1$  і  $q = 2$ . Для  $q = 1$  маємо:

$$M_2 = (-1) \frac{M^0(0)M^2(0)}{2} + \frac{M^1(0)M^1(0)}{1} + (-1) \frac{M^2(0)M^0(0)}{2} =$$

$$= -d_2 + d_1^2 - d_2 = -2d_2 + d_1^2 \quad (8.60)$$

Аналогічно для  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = (-1) \frac{\Delta^0(0)\Delta^2(0)}{2} + \frac{\Delta^1(0)\Delta^1(0)}{1} + (-1) \frac{\Delta^2(0)\Delta^0(0)}{2} =$$

$$= -1 + \frac{121}{36} - 1 = \frac{49}{36} \quad (8.61)$$

З (8.61) випливає, що для  $q = 1$   $M_2 = \Delta_2$ , отже

$$-2d_2 + d_1^2 = 49/36. \quad (8.62)$$

Завершуючи процес, для  $M_4 = \Delta_4$  отримаємо:

$$d_2^2 = 7/18. \quad (8.63)$$

Спільне рішення (8.62) і (8.63) дає:  $d_1 = 1,615$  і  $d_2 = 0,625$ . (Інші рішення відкидаємо, тому що вони дають полюси в правій половині s-площині.) Таким чином, система зниженого порядку має передаточну функцію

$$\hat{W}(s) = \frac{1}{1 + 1,615s + 0,625s^2} = \frac{1,60}{s^2 + 2,584s + 1,60}. \quad (8.64)$$

$W(s)$  має полюси  $s = -1, -2, -3$ , полюси  $\hat{W}(s)$  такі:  $s = -1,029$  та  $-1,555$ . Оскільки модель зниженого порядку має два полюси, можна оцінити, що система буде мати злегка передемпфированну перехідну характеристику з часом встановлення приблизно 3 с.

Число невідомих параметрів моделі (8.55) при цьому скоротилось на одиницю, що спрощує задачу ідентифікації. Інший підхід до спрощення, побудований на розкладанні  $W(s)$  в ряд

Маклорена і обчисленню по ньому коефіцієнтів спрощеної передавальної функції  $\hat{W}(s)$  буде розглянуто в розділі 9.

## 8.5. Моделі в змінних стану

### 8.5.1. Змінні стану

Аналіз систем в часовому області базується на понятті стану системи. **Стан системи – це сукупність таких змінних, опис якими динаміки системи дозволяє визначити її майбутній стан і вихідну змінну.** Для динамічної системи її стан описується набором змінних  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , які визначають майбутню поведінку системи, якщо відомо її поточний стан і всі зовнішні впливи. Наприклад, двовірна система (рис. 8.22) має  $y_1(t)$  і  $y_2(t)$  – вихідні змінні, а  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  – вхідні. Якщо відомі початкові значення  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  і вхідні сигнали  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  для  $t \geq t_0$ , то цього достатньо, щоб визначити майбутні значення всіх змінних стану і вихідних змінних.

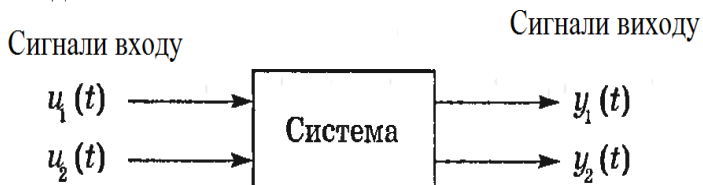


Рис.8.22. Структурна система системи

Таким чином, змінні стану описують поведінку системи в майбутньому, якщо відомі поточний стан, зовнішній вплив і рівняння динаміки системи.

Загальний вигляд динамічної системи наведено на рис. 8.23.

Поняття змінних стану проілюструємо на прикладі системи (8.1) «маса-пружина» з затуханням (рис. 8.24). Число змінних стану, вибраних для опису системи, має бути по можливості мінімальним,



щоб серед них не було зайвих. Для даної системи цілком достатньо мати дві змінні стану:  $x_1(t)$  – положення і  $x_2(t)$  – швидкість руху маси  $m$ ;  $(x_1, x_2), x_1(t) = y(t)$  – вихідна змінна. Тоді



Рис.8.23. Динамічна система

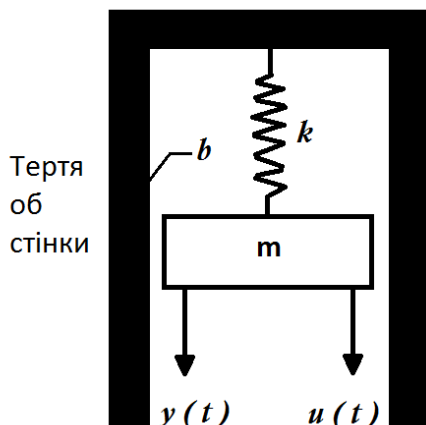


Рис.8.24. Система «Маса-пружина» з затуханням

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

Диференційне рівняння (8.1), яке описує поведінку системи

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ky = u(t),$$

з урахуванням введених змінних стану, набуває вигляду:

$$m \frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = u(t).$$

Останнє рівняння можна представити в вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u, \end{cases}$$

Ці рівняння описують залежність швидкості зміни кожної змінної стану від змінних стану  $x_1$ ,  $x_2$  і вхідної змінної  $u(t)$ .

В загальному випадку стан системи описується диференціальними рівняннями першого порядку відносно кожної із змінних стану:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \quad (8.65)$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m,$$

де  $\dot{x} = dx/dt$ . Система (8.65) в матричній формі:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

Матриця-стовпчик, яка складається із змінних стану, називається вектором стану.

Вектор вхідних впливів позначається як  $u$ . Тоді систему (8.66) можна описати у векторно-матричному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (8.67)$$

Матриця  $A$  – квадратна розмірності  $n \times n$ , матриця  $B$  має розмірність  $n \times m$ . Рівняння стану зв'язує швидкість зміни стану системи з самим станом і вхідними сигналами. В загальному випадку вихідні змінні стану системи зв'язано зі змінними стану і вхідними впливами **рівнянням виходу**

$$y = Cx + Du, \quad (8.68)$$

де  $y$ – сукупність вихідних сигналів, представлена в вигляді вектора-стовпчика.

Скориставшись рівняння (8.67), запишемо рівняння стану для системи (рис.8.24):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t). \quad (8.69)$$

Рівняння виходу:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \quad (8.70)$$

Рішення диференційного рівняння стану (8.69) формально можна отримати схожим на рішення скалярного диференційного рівняння першого порядку:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (8.71)$$

де  $x(t)$  і  $u(t)$  – скалярні функції часу. Перетворимо по Лапласу рівняння (8.71):

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

звідки

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a} U(s). \quad (8.72)$$

Зворотнє перетворення Лапласа рівняння (8.72) дає рішення:

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(1-\tau)} b u(\tau) d\tau, \quad (8.73)$$

яке подібне по вигляду і рішенню векторно-матричному диференційному рівнянню стану (8.67). Розглянемо **матричну експоненціальну функцію**. Представимо її у вигляді ряду

$$e^{At} = \exp(At) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \quad (8.74)$$

Рішення рівняння стану, подібне (8.73), буде мати вигляд:

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau. \quad (8.75)$$

Рішення (8.75) можливо також отримати, застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (8.67) і згрупувавши члени. В результаті отримаємо:

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} BU(s), \quad (8.76)$$

де  $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$  зображення Лапласа функції  $\Phi(s) = \exp(At)$ . Застосувавши до (8.76) обернене перетворення Лапласа і

враховуючи, що другий доданок в правій частині містить добуток  $\Phi(s)BU(s)$ , отримаємо рішення (8.75). Матрична експоненціальна функція  $\Phi(t)$  описує вільний рух системи і називається **фундаментальною матрицею** або **перехідною матрицею стану**. Таким чином, рішення (8.75) можна записати в вигляді:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (8.77)$$

За рівнянням стану системи, з входом і виходом визначимо її передавальну функцію. Взявши для рівнянь (8.67) і (8.68) перетворення по Лапласу за нульових початкових умов  $X(0)=0$  отримаємо:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s), \quad (8.78)$$

і

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (8.79)$$

Групуючи члени в рівнянні (8.78), отримаємо:

$$(sI - A)X(s) = BU(s),$$

Так як  $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$ , то  $X(s) = \Phi(s) BU(s)$ .

Підставляючи  $X(s)$  в (8.79), отримаємо:

$$Y(s) = [C \Phi(s)B + D]U(s) \quad (8.80)$$

Передавальна функція  $W(s) = Y(s)/U(s)$ , тобто:

$$W(s) = C\Phi(s)B + D \quad (8.81)$$

Приклад 8.12. Зв'язок моделі в змінних стану і відповідних передавальних функцій моделі короткопередавального повздовжнього руху літака.

Рівняння стану

$$\begin{aligned}\bar{X} &= AX + BU, \\ Y &= CX\end{aligned}\quad (8.82)$$

де  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ;  $x_1$  – відхилення від балансованого кута атаки літака;  $x_2$

– відхилення кутової швидкості обертання літака;  $U$  – відхилення руля висоти літака;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{аеродинамічні коефіцієнти.}$$

Для визначення матричної передавальної функції  $W(s)$  (8.81) візьмемо перетворення Лапласа для системи (8.82) за нульових початкових умов:

$$\begin{aligned}SX(s) &= AX(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s).\end{aligned}$$

Звідси, згідно (8.81) (для  $D=0$ )

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (8.83)$$

або

$$\begin{aligned}W(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (s - a_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} W_{11}(s) & 0 \\ 0 & W_{22}(s) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\text{де } W_{11}(s) = \frac{x_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1(s - a_{22})}{s^2 + a_{11}a_{22}s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})},$$

$$W_{22}(s) = \frac{x_2(s)}{U(s)} = \frac{b_2(s - a_{11})}{s^2 + a_{11}a_{22}s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Задача ідентифікації може вирішуватись як для системи (8.82) у змінних стану, так і для передавальних функцій (8.83).

### 8.6. Часові характеристики і перехідна матриця стану

Перехідні характеристики системи можна отримати шляхом вирішення рівняння стану, яке має вигляд:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau. \quad (8.84)$$

Якщо відомі початкові умови  $x(0)$ , вектор вхідних впливів  $u(t)$  і перехідна матриця стану  $\Phi(t)$ , то реакція системи  $x(t)$  може бути вирахована тим чи іншим способом. Таким чином, задача зводиться до вирахування матриці  $\Phi(t)$ , яка в основному і визначає реакцію системи. Слід згадати і деякі методи вирахування ряду

$$\Phi(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (8.85)$$

з обмеженим числом членів. Відомі також ефективні методи вирахування  $\Phi(t)$  за допомогою комп'ютерних алгоритмів. В рівнянні (8.76) показано, що  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ . Тоді, якщо вирахувати зворотну матрицю, то можна знайти і  $\Phi(t)$  як зворотне перетворення Лапласа для  $\Phi(s)$ , тобто

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)].$$

Розглянемо перетворення Лапласа рівняння (8.84), вважаючи вхідні сигнали рівними нулю. Тоді для  $u(\tau) = 0$  із (8.84) маємо:

$$X(s) = \Phi(s)x(0) \quad (8.86)$$

Перехідна матриця стану буде оберненим перетворенням Лапласа від  $\Phi(s)$ , тобто

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)] \quad (8.87)$$

Тоді залежність змінних стану від початкових умов  $x(0)$  визначається, наприклад, для системи (8.82) другого порядку наступним чином:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \varphi_{11}(s)x_1(0) + \varphi_{12}(s)x_2(0), \\ X_2(s) &= \varphi_{21}(s)x_1(0) + \varphi_{22}(s)x_2(0), \end{aligned} \quad (8.88)$$

де  $\varphi_{ij}$  - складові матричної перехідної функції  $\Phi(s)$ .

Часові характеристики системи, яка описується векторно-матричним диференціальним рівнянням стану, можна отримати, скориставшись **дискретною апроксимацією**. Подібна апроксимація ґрунтується на розбитті часової осі на достатньо малі відрізки. Тоді значення змінних стану будуть вираховуватись в дискретні моменти часу  $t=0, T, 2T, \dots$ , де  $T$  є кроком дискретності у часі. Цей метод широко використовується для чисельного аналізу і для обчислення на цифрових комп'ютерах. Якщо крок дискретності  $T$  – достатньо малий порівняно з сталими часу системи, то точність обчислень буде цілком припустимою.

Рівняння стану лінійної системи має вигляд:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.89)$$

Скористаємось класичною формулою похідної:

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (8.90)$$

для обчислення значень  $x(t)$  при розбитті  $t$  на малі відрізки  $\Delta t = T$ . Отримаємо **апроксимацію** похідної

$$\dot{x} = \frac{x(t + T) - x(t)}{T},$$



і підставимо її в рівняння (8.91) :

$$\frac{x(t+T) - x(t)}{T} \approx Ax(t) + Bu(t)$$

Звідси :

$$x(t+T) \approx TA x(t) + x(t) + T B u(t) = (TA + I)x(t) + T B u(t), \quad (8.91)$$

де  $t$  розбито на малі відрізки тривалістю  $T$ . Тому час  $t$  приймає дискретні значення  $t=kT$ ,  $k=0,1,2,3,\dots$ . Тоді вираз (8.91) набирає вигляду:

$$x[(k+1)T] \approx (TA + I)x(kT) + T B u(kT) \quad (8.92)$$

Таким чином, значення вектора стану в  $(k+1)$ -й момент часу визначається через значення  $x$  і  $u$  в  $k$ -й момент часу. Вираз (8.92) можна записати інакше:

$$x(k+1) \approx \psi(T)x(k) + T B u(k), \quad (8.93)$$

де  $\psi(T) = (TA + I)$ . Вираз (8.93) показує, що визначення  $x(t)$  зводиться до обчислення його дискретної апроксимації  $x(k+1)$  на основі попереднього значення  $x(k)$ . Ця рекурентна операція, відома як **метод Ейлера**, представляє собою послідовність обчислень і просто реалізується на цифрових комп'ютерах. Для розрахунків можуть також бути використані більш точні методи чисельного інтегрування, наприклад методи Рунге-Кутта.

### **Приклад 8.13. Неперервна та дискретна модель епідемії**

В біології також важливо визначати відповідні моделі. Так поширення епідемічного захворювання описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 + u_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 x_2 - \gamma x_2 + u_2(t), \end{aligned} \quad (8.94)$$

$$\dot{x}_3 = \alpha x_1 + \gamma x_2,$$

де взаємодію між групами населення представлено нелінійним членом  $x_1 x_2$ .

Будемо вважати, що  $\alpha = \beta = \gamma = 1, u_1(t) = 0, u_2(0) = 1$  і  $u_2(k) = 0$  при  $k \geq 1$ . Виберемо крок дискретності  $T=0,2$  діб і задамо початкові умови в вигляді  $x^T(0)=[1 \ 0 \ 0]$ . Тоді, підставляючи в рівняння (8.94)  $t=kT$ . Отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} &= -x_1(k) - x_1(k)x_2(k), \\ \frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} &= x_1(k)x_2(k) - x_2(k) - u_2(k), \\ \frac{x_3(k+1) - x_3(k)}{T} &= x_1(k) + x_2(k). \end{aligned}$$

Визначимо із цих рівнянь  $x_i(k+1)$ :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0,8x_1(k) - 0,2x_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) &= 0,8x_2(k) - 0,2x_1(k)x_2(k) + u_2(k), \\ x_3(k+1) &= x_3(k) - 0,2x_1(k) + 0,2x_2(k). \end{aligned} \tag{8.95}$$

В перший момент часу, для  $t=T$  маємо:

$$x_1(1) = 0,8x_1(0) = 0,8, x_2(1) = 0,2u_1(0) = 0,2, x_3(1) = 0,2x_1(0) = 0,2.$$

Ще раз використовуючи рівняння (8.95) і враховуючи, що  $u_2(1)=0$ , отримаємо:

$$x_1(k+1) = 0,8x_1(k) - 0,2x_1(k)x_2(k) = 0,608,$$

$$x_2(k+1) = 0,8x_2(k) - 0,2x_1(k)x_2(k) + u_2(k) = 0,192,$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) - 0,2x_1(k) + 0,2x_2(k) = 0,40$$

Аналогічно, при  $t=3T$  маємо:

$$x_1(3) = 0,463, \quad x_2(3) = 0,177, \quad x_3(3) = 0,56$$

Подальші обрахування виконуються аналогічно.

Обчислення часових характеристик лінійних систем легко відбувається шляхом використання перехідної матриці стану або за допомогою дискретної апроксимації рівняння стану. Для нелінійних систем найбільш підходящим є метод дискретизації рівняння стану.

#### **Приклад 8.14. Модель електроприводу принтера у просторі стану**

В принтері для комп'ютера горизонтальне переміщення друкуючого пристрою вздовж сторінки здійснюється за допомогою пасового приводу з двигуном постійного струму (рис. 8.25). В даній конструкції положення друкуючого пристрою вимірюється за допомогою фотодатчика, а натягнення ремня змінює його коефіцієнт пружності. Для вибору належних параметрів електродвигуна, шківів, регулятора і аналізу впливу коефіцієнта пружності ремня на характеристики системи потрібно розробити модель приводу. Після цього визначимо передавальну функцію системи і виберемо її решту параметрів.

На рис. 8.25. зображено модель пасового приводу. Припускається, що коефіцієнт пружності ремня рівний  $k$ , радіус шківів –  $r$ , кут повороту вала двигуна –  $\alpha$ , кут повороту правого шківів –  $\alpha_p$ , маса друкуючого пристрою –  $m$ , його положення –  $y(t)$ . Виходом фотодатчика є напруга  $U_1$ , пропорційна переміщенню  $y$ , тобто  $U_1 = k_I y$ . Регулятор виробляє вихідну напругу  $U_2$ , яка є функцією  $U_1$ . Напруга  $U_2$  подається на обмотку збудження двигуна. Лінеаризована залежність:

$$v_2 = k_2 \frac{dv_1}{dt}, \quad (8.96)$$

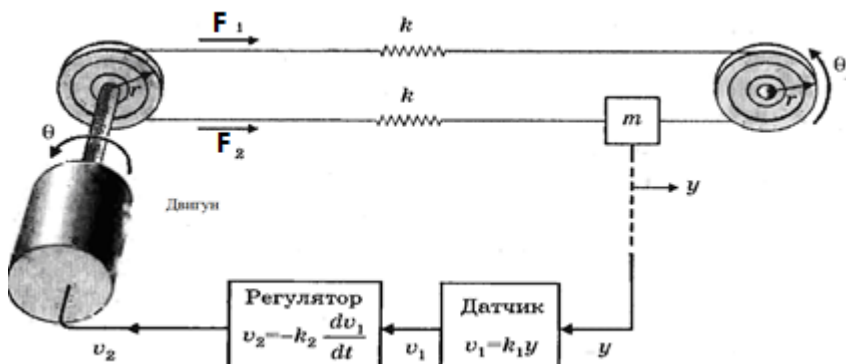


Рис.8.25. Модель ременного приводу принтера

Зауважимо, що  $y = r\theta_p$ . Тоді сила натягу  $F_1$  дорівнює:

$$F_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y). \quad (8.97)$$

Сила натягу  $F_2 = k(y - r\theta)$ . Сила, яка діє на масу  $m$ :

$$F_1 - F_2 = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (8.98)$$

і

$$F_1 - F_2 = k(r\theta - y) - k(y - r\theta) = 2k(r\theta - y) = 2kx_1, \quad (8.99)$$

де  $x_1 = k(r\theta - y)$  прийемо за першу змінну стану. Другою змінною стану буде  $x_2 = dy/dx$ , тоді:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2k}{m} x_1. \quad (8.100)$$

Якщо в якості третьої змінної стану вибрати  $x_3 = dy/dx$ , то

$$\frac{dx_1}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} - \frac{dy}{dt} = rx_3 - x_2. \quad (8.101)$$

Диференційне рівняння електродвигуна. При  $L=0$  струм збудження  $i = v_2 / R$  і момент на валу  $M_m = K_m i$ .

$$M_m = \frac{K_m}{R} * U_2,$$

Момент Мобумовлює обертання шківа, тому

$$M = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + r(M_1 - M_2).$$

Так як

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d_2 \theta}{dt_2},$$

то:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{M_m - M_d}{J} - \frac{b}{J} x_3 - \frac{2kr}{J} x_1,$$

де

$$M_m = \frac{K_m}{R} * U_2 \text{ і } U_2 = -k_1 k_2 = \frac{dy}{dt} = -k_1 k_2 x_2.$$

В результаті отримуємо:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{K_m k_1 k_2}{JR} \cdot x_2 - \frac{b}{J} x_3 - \frac{2kr}{J} x_1 - \frac{Td}{J}. \quad (8.102)$$

Рівняння (8.100-8.102) описують динаміку системи. Диференційне рівняння стану в векторно-матричному виді:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & r \\ \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{2kr}{J} & -\frac{K_m k_1 k_2}{JR} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} M_d \quad (8.103)$$

### Приклад 8.15. Перевернутий маятник як фізична модель ракети на страті

Проблема управління положенням ракети на початкової стадії польоту: ракета знаходиться в рівновазі якщо  $\theta(t) = 0$  і  $d\theta/dt = 0$ . Ця проблема класично моделюється в вигляді перевернутого маятника, який змонтовано на візку, як (рис. 8.26). Візок повинен рухатись таким чином, щоб маса  $m$  завжди займала близьке до вертикального положення. В якості змінних стану природно прийняти кут відхилення маятника  $\theta(t)$  і переміщення візка  $y(t)$ . Диференціальне рівняння, яке описує рух даної системи, можна отримати, записавши вираз для суми сил, які діють в горизонтальному напрямку, і суми моментів відносно точки обертання. Будемо вважати, що  $m_2 \gg m_1$  і кут відхилення від вертикалі  $\theta$  є малим, тому рівняння є лінійним. Сума сил, які діють в горизонтальному напрямку, рівна

$$m_2 \ddot{y} = m_1 l \ddot{\theta} - u(t) = 0 \quad (8.104)$$

де  $u(t)$  – сила, прикладена до візка,  $l$  – відстань від маси  $m_2$  до точки обертання. Сума моментів відносно точки обертання

$$m_2 l \ddot{y} = m_1 l_2 \ddot{\theta} - m_1 l g \theta = 0. \quad (8.105)$$

Виберемо змінні стану для двох рівнянь другого порядку  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ . Рівняння (8.104) і (8.105) з врахуванням цих змінних стану:

$$m_2 \dot{x}_2 + m_1 \dot{x}_4 - u(t) = 0, \quad (8.106)$$

$$\dot{x}_2 + l\ddot{x}_4 - gx_3 = 0. \quad (8.107)$$

Для того, щоб отримати необхідні диференціальні рівняння першого порядку, визначимо із (8.107)  $l\ddot{x}_4$  і підставимо його в (8.106):

$$m_2\dot{x}_2 + m_1gx_3 = u(t), \quad (8.108)$$

де враховано, що  $m_2 \gg m_1$ . Далі, підставляючи  $\dot{x}_2$  із (8.106) в (8.107), отримаємо:

$$m_2\dot{x}_2 + m_2gx_3 + u(t) = 0. \quad (8.109)$$

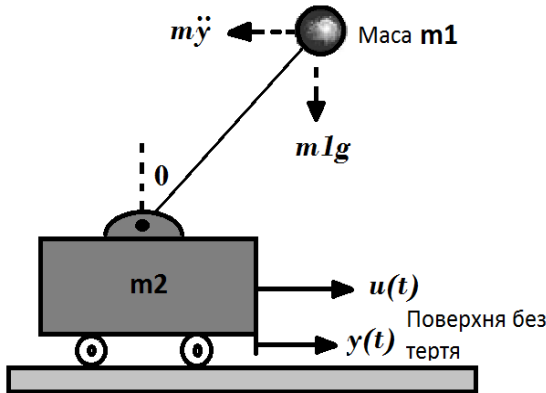


Рис.8.26. Перевернутий маятник на візку

Таким чином отримаємо систему у змінних стану:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = -\frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u(t), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \dot{x}_4 = -\frac{g}{l}x_3 - \frac{1}{Ml}u(t) \end{aligned} \quad (8.110)$$

Звідси отримуємо матриці системи виду (3.4):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix} \quad (8.111)$$

## 8.7. Моделі об'єктів з розподіленими параметрами та їх ідентифікація

### 8.7.1 Моделювання об'єктів з розподіленими параметрами

У таких об'єктах[2,3,4] параметри розподіляються вздовж просторових координат. Так у газопроводі тиск, а в теплообмінній трубці температура поступово змінюється вздовж осі труб. У насадковому абсорбері поступово змінюється з висотою насадки концентрація зрошуючої рідини, а також концентрація компонентів газу, що піднімається їй на зустріч. У теплообмінній стінці змінюється температура за її товщиною.

Математичними моделями об'єктів з просторовим розподіленням параметрів є рівняння статички чи динаміки виділеної нескінченно малої акумулюючої області разом з граничними умовами зміни визначального параметра, а для динамічних моделей ще і початковими умовами, тобто просторове розподілення визначального параметра в початковий момент часу.

Моделювання об'єктів з просторовим розподіленням параметрів пов'язано з врахуванням напрямків зміни. Вони можуть змінюватися відповідно одному просторовому напрямку (осі)  $X$ , наприклад, вздовж осі трубопроводу чи через теплообмінну стінку; двом ( $X, Y$ ) чи трьом взаємноортогональним напрямкам ( $X, Y, Z$ ). Можлива радіальна зміна параметра, наприклад, тепловиділяючого елементу(ТВЕЛ) атомного реактора.

Можливе також поєднання радіального та лінійного розподілення параметра, наприклад, температури у трубчатому каталітичному реакторі; сферичне розподілення параметру, наприклад яскравості світла від точкового джерела.

Для всіх цих випадків підхід до вибору нескінченно малої акумулюючої ємкості буде різним: це може бути вісь нескінченно



малої довжини у випадках одномірного лінійного розподілення параметру, прямокутник чи паралелепіпед нескінченно малих розмірів у випадках 2-х мірного лінійного розподілення, це може бути сфера нескінченно малої товщини у випадку сферичного розподілення параметру.

Раціональний вибір форми та місця розшатування нескінченно малої області під час математичного опису об'єктів з розподіленими параметрами пов'язаний з об'ємними формами об'єкта, а головне, з напрямками просторового розподілення визначальних параметрів. Нескінченно мала акумулююча область у цьому випадку повинна вибиратися таким чином, щоб можна було її розмістити в довільному місці об'єкта. Граничні зміни визначального параметра в просторових межах об'єкта задаються граничними умовами. Граничні умови, таким чином, визначають діапазон змін визначальних параметрів і, крім того, визначають можливості просторового розташування вибраної нескінченно малої ємності. Щоб вибрану нескінченно малу акумулюючу область можна було віднести до кожної точки об'єкта моделювання, необхідно вибрати певну систему координат і розташувати її таким чином, щоб вона відповідала напрямкам зміни визначального параметра.

Виходячи з цього, можна зробити узагальнення, що математичне моделювання об'єктів з розподіленими параметрами зв'язано з певними просторовими системами координат, в яких розташовують об'єкт моделювання у відповідності з напрямками розподілення (зміни) визначального параметра.

Застосовуються декартова, циліндрична та сферична системи координат. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Тепловий об'єкт має просторові границі, на яких температура відповідним чином зв'язана з навколишнім середовищем. Цей зв'язок температури з навколишнім середовищем на границях об'єкта моделювання називається граничними умовами. Динамічні моделі, які розглядають зміну визначального параметра в часі, включають в себе також початкові умови визначального параметра, тобто його розподілення в початковий момент часу.

Таким чином, математична модель динаміки об'єкта з розподіленими параметрами включає в себе рівняння динаміки характерної для даного об'єкта нескінченно малої області, граничні та початкові умови зміни визначального параметра.

Для теплообмінних процесів теплообміну використовують граничні умови чотирьох видів:

1) Граничні умови першого роду визначають визначальний параметр, наприклад  $\theta(x, t)$ , на границях об'єкта, тобто коли просторова координата  $X$  приймає граничні значення від  $X=0$  до  $X=1$

$$\Theta(t, x)_{x=0} = \theta_0(t), \quad (8.112)$$

$$\theta(x, t)_{x=l} = \theta_1(t). \quad (8.113)$$

2) Граничні умови другого роду задають тепловий потік на границях об'єкта, наприклад:

$$\lambda \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \bigg|_x = q_0(t), \quad (8.114)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $q_0(t)$  – тепловий потік.

Знак мінус вказаний протилежний напрямок теплового потоку від напрямку збільшення температури.

3) Граничні умови третього роду визначають закон теплообміну між середовищами на границях об'єкта, наприклад, конвективного теплообміну:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \bigg|_x = \alpha [\theta(t, x)_{x=1} - \theta_1(t)], \quad (8.115)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $\theta_1(t)$  – температура середовища, яке контактує з об'єктом.

4) Граничні умови четвертого роду визначають умови теплообміну двох твердих тіл, для яких має місце однаковість температур та теплових потоків на границях об'єкта:

$$\theta(x, t)_{x=1} = \theta_1(x, t)_{x=1} = \theta_1,$$

$$\lambda \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_x = x_1 = -\lambda \frac{\partial \theta_1(x, t)}{\partial x} \Big|_x = x_1. \quad (8.116)$$

Моделювання об'єктів з розподіленими параметрами інших типів зв'язано з граничними умовами меншої різноманітності. Найчастіше у цих випадках мають місце граничні умови першого роду, наприклад для об'єктів з просторовим розподіленням тиску, концентрації та ін.

Для рівнянь в циліндричній системі координат також можна записати граничні умови 4-х родів:

1) граничні умови 1-го роду:

$$\theta(r, t) \Big|_{r=r_0} = \theta_0(t), \quad (8.117)$$

$$\theta(r, t) \Big|_{r=r_1} = \theta_1(t). \quad (8.118)$$

2) граничні умови другого роду:

$$\lambda \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = q_0(t). \quad (8.119)$$

3) граничні умови третього роду:

$$\lambda \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = a[\theta(r, t) \Big|_{r=r_0} - \theta_1(t)]. \quad (8.120)$$

4) граничні умови четвертого роду:

$$\begin{aligned} \theta(r, t) \Big|_{r=r_1} &= \theta_1(t) \Big|_{r=r_1}, \\ \lambda \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= \lambda \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_1}. \end{aligned} \quad (8.121)$$

Граничні умови в сферичній системі координат подібні до циліндричної системи.

Дослідження динаміки об'єктів з розподіленими параметрами проводиться в області часових характеристик. Однак розв'язком диференціального рівняння динаміки є сімейство часових характеристик. Конкретизація певної часової характеристики зв'язана із задаванням *початкових умов*, тобто задаванням значення визначального параметра в початковий момент часу, як наприклад, для визначальної змінної  $\theta(x, t)$

$$\theta(t, x)|_{x=0} = (t). \quad (8.122)$$

### 8.7.2. Класифікація математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами

Статичні моделі. Для одномірного розподілення в просторі – це звичайні диференціальні рівняння з просторовою незалежною змінною, а у випадках 2-х чи 3-х мірного розподілення - це диференціальні рівняння у частинних похідних з просторовими незалежними змінними. Статичні моделі з розподіленими параметрами можна отримати шляхом складання балансних рівнянь для нескінченно малих областей без врахування зміни їх визначальних параметрів у часі, або з динамічних моделей шляхом виключення з числа змінних часу, тобто приймаючи стале в часі значення змінних моделі.

Статичну модель теплового об'єкта з трьохмірним просторовим розподіленням параметрів у декартовій системі координат отримаємо із динаміки та граничних умов, наприклад 3-го роду (8.115), прийнявши, що змінні не залежать від часу:

$$a \left( \frac{\partial^2 \theta(x, y, z,)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z,)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z,)}{\partial z^2} \right) = - \frac{q}{\rho c}. \quad (8.123)$$

Граничні умови 3-го роду:

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = a_x [\theta_0 - \theta(x, y, z)|_{x=0}], \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{x=0} = a_y [\theta_0 - \theta(x, y, z)|_{x=0}], \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{x=0} = a_z [\theta_0 - \theta(x, y, z)|_{x=0}]. \end{cases} \quad (8.124)$$

Статичну модель у циліндричній системі отримаємо із динаміки і граничних умов:

$$a \left( \frac{\partial^2 \theta(x, r, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \theta(x, r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \theta(x, r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = -\frac{q}{\rho c}. \quad (8.125)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial \theta(x, r, \varphi)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = a_x [\theta_0 = \theta(x, r, \varphi)|_{x=x_1} - \theta_1], \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = a_r [\theta_0 = \theta(x, r, \varphi)|_{r=r_1} - \theta_1], \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} = a_\varphi [\theta_0 = \theta(x, r, \varphi)|_{\varphi=\varphi_1} - \theta_1]. \end{cases} \quad (8.126)$$

Статичну модель у сферичній системі координат отримаємо із динаміки з врахуванням, що  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ :

$$a \left( r \frac{d^2 \theta(r)}{dr^2} + 2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) = -\frac{rq}{\rho c} \quad (8.127)$$

граничні умови:

$$-\lambda \frac{d\theta(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} = a \left( \theta(r)|_{r=r_1} - \theta_1 \right). \quad (8.128)$$

Розв'язок статичної моделі визначає розподілення визначального параметра вздовж просторових координат. Це стаціонарне поле розподілення визначального параметра.

**Приклад 8.16.** Визначити залежність  $\theta(x) = f(\theta_1, \theta_0)$ . одномірного теплового поля в стінці товщиною  $\delta$  із статичної моделі (8.122) та (8.123) від зовнішніх температур  $\theta_{x_0}$  та  $\theta_{x_1}$  :

$$a \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = -\frac{q}{\rho c}, \quad (8.129)$$

$$\begin{cases} -\lambda \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=0} = a [\theta_0 - \theta(x)|_{x=0}], \\ -\lambda \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=\delta} = a_1 [\theta(x)|_{x=\delta} - \theta_1]. \end{cases} \quad (8.130)$$

Спростимо рівняння (8.129):

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda}, \quad (8.131)$$

Розв'язок якого будемо шукати у вигляді:

$$\theta(x) = C_0 + C_1 x - \frac{q}{2\lambda} x^2. \quad (8.132)$$

Для визначення констант  $C_0$  та  $C_1$  скористуємося граничними умовами (8.130). Для цього потрібно мати  $\theta(x)$  і  $\frac{d\theta(x)}{dx}$ . Похідна від (8.132):

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = C_1 - \frac{q}{\lambda} x. \quad (8.133)$$

Підставимо вирази (8.132) та (8.133) в рівняння (8.130):

$$\begin{cases} -\lambda C_1 = a(\theta_0 - C_0), \\ -\lambda \left( C_1 - \frac{q}{\lambda} \delta \right) a_1 \left( C_0 + C_1 \delta - \frac{q}{\lambda} \delta^2 - \theta_1 \right). \end{cases} \quad (8.134)$$

І розв'яжемо систему рівнянь (8.134) відносно  $C_0$  та  $C_1$ . Тоді

$$C_0 = \frac{\theta_0 \left( \delta + \frac{\lambda}{a_1} \right) + \frac{\lambda}{a} \theta_1 + q \frac{\delta}{a} \left( \frac{\lambda}{a_1} + \frac{\delta}{2} \right)}{\delta + \frac{\lambda}{a_1} + \frac{\lambda}{a}}, \quad (8.135)$$

$$C_1 = \frac{\theta_0 + q \frac{\delta}{a} \left( \frac{\lambda}{a_1} + \frac{\delta}{2} \right) - \theta_1}{\delta + \frac{\lambda}{a_1} + \frac{\lambda}{a}}. \quad (8.136)$$

Підставивши  $\theta_0$  та  $\theta_1$  в (8.132) та спростивши, отримаємо рівняння теплового поля в стінці:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & k \left[ \theta_0 \left( \frac{\delta - x}{\lambda} + \frac{1}{a_1} \right) + \theta_1 \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \right] + \\ & + q \frac{k \delta^2}{\lambda} \left\{ \left( \frac{\lambda}{a \delta} + \frac{x}{\delta} \right) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{\delta}{2\lambda} \right) - \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (8.137)$$

$$\text{де } k = \left( \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{a_1} \right)^{-1}.$$

Із розв'язку статичної моделі (8.137) отримаємо залежності:

$$\theta(x) = k \left( \frac{\delta - x}{\lambda} + \frac{1}{a_1} \right) \theta_0, \quad (8.138)$$

$$\theta(x) = k \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \theta_1. \quad (8.139)$$

**Приклад 8.17.** Визначимо залежність  $\theta(r) = (\theta_0, \theta_1)$  теплового поля статичної моделі для радіального розподілення температури :

$$a \left( r \frac{d^2\theta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta(r)}{dr} \right) = -\frac{q}{\rho c}, \quad (8.140)$$

$$-\lambda \frac{d\theta(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = a \left( \theta_0 - \theta(r) \Big|_{r=0} \right), \quad (8.141)$$

$$-\lambda \frac{d\theta(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} = a_1 \left( \theta(r) \Big|_{r=r_1} - \theta_1 \right), \quad (8.142)$$

яке враховує вплив на  $\theta_0(r)$  температур  $\theta_0$  та  $\theta_1$ .

Враховуючи (8.140) отримаємо циліндричне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\theta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta(r)}{dr} = -\frac{q}{\lambda}. \quad (8.143)$$

Позначимо

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = y \quad (8.144)$$

і підставимо в рівняння (8.143) буде мати вигляд:

$$\frac{dy}{dr} + \frac{y}{r} = -\frac{q}{\lambda}. \quad (8.145)$$

Прийmemo, що

$$y = UV \quad (8.146)$$

і підставимо це в (8.145):

$$\frac{dU}{dr} V + \frac{dV}{dr} U + \frac{UV}{r} = -\frac{q}{\lambda}. \quad (8.147)$$

Виберемо  $V$ з умови, щоб



$$\frac{dV}{dr}U + \frac{UV}{r} = U \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) = 0. \quad (8.148)$$

Для  $U \neq 0$ , ця умова виконується, якщо

$$V = \frac{1}{r}. \quad (8.149)$$

Дійсно, з врахуванням (8.149) та (8.148), вираз (8.147) буде мати вигляд:

$$\frac{dU}{dr} * \frac{1}{r} = -\frac{q}{\lambda}, \quad (8.150)$$

звідки

$$dU = -\frac{q}{\lambda} r dr. \quad (8.151)$$

або

$$U = -\frac{qr^2}{\lambda 2} + C_0. \quad (8.152)$$

Враховуючи (8.149) та (8.152), а також (8.146), вираз (8.144) дорівнює

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -\frac{qr}{\lambda 2} + \frac{C_0}{r}. \quad (8.153)$$

Проінтегруємо (8.153):

$$\theta(r) = -\frac{q}{2\lambda} \frac{r^2}{2} + C_0 \ln r + C_1. \quad (8.154)$$

Визначимо константи  $C_0$  та  $C_1$ , підставивши (8.153) та (8.154) в граничні умови (8.141) та (8.142) та враховуючи відповідні значення  $r$ :

$$-\frac{\lambda}{\alpha} \left( -\frac{q}{2\lambda} r_0 + \frac{C_0}{r_0} \right) - \frac{q}{4\lambda} r_0^2 + C_0 \ln r_0 + C_1 = \theta_0, \quad (8.155)$$

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} \left( -\frac{q}{2\lambda} r_1 + \frac{C_0}{r_1} \right) - \frac{q}{4\lambda} r_1^2 + C_0 \ln r_1 + C_1 = \theta_1.$$

Після спрощення отримаємо:

$$-C_0 \left( \ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha r_0} \right) + C_1 = \theta_0 + q \left( \frac{r_0^2}{4\lambda} - \frac{r_0}{2\alpha} \right), \quad (8.156)$$

$$C_0 \left( \ln r_1 - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} \right) + C_1 = \theta_1 + q \left( \frac{r_1^2}{4\lambda} - \frac{r_1}{2\alpha_1} \right).$$

Звідси

$$C_0 = \frac{\theta_0 - \theta_1 + q \left[ \frac{r_0^2 - r_1^2}{4\lambda} - \left( \frac{r_0}{2\alpha} + \frac{r_1}{2\alpha_1} \right) \right]}{\ln \left( \frac{r_0}{r_1} \right) - \frac{\lambda}{\alpha r_0} - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}}, \quad (8.158)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\theta_1 \left( \ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha r_0} \right) - \theta_0 \left( \ln r_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} \right)}{\ln \left( \frac{r_0}{r_1} \right) - \frac{\lambda}{\alpha r_0} - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}} = \\ &= \frac{q \left[ \left( \frac{r_1^2}{4\lambda} + \frac{r_1}{2\alpha_1} \right) \left( \ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha r_0} \right) - \left( \frac{r_0^2}{4\lambda} - \frac{r_0}{2\lambda} \right) \left( \ln r_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} \right) \right]}{\ln \left( \frac{r_0}{r_1} \right) - \frac{\lambda}{\alpha r_0} - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}} \end{aligned} \quad (8.159)$$

Підставивши (8.158) та (8.159) в (8.154), отримаємо:

$$\theta(r) = \frac{\ln \frac{r_1}{r} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}}{M} \theta_0, \quad (8.160)$$

$$\theta(r) = \frac{\ln \frac{r}{r_0} + \frac{\lambda}{\alpha r_0}}{M} \theta_1, \quad (8.161)$$

$$M = \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda}{\alpha r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}. \quad (8.162)$$

Передаточні функції. Передаточна функція представляє зображення за Лапласом відношення вихідної змінної до вхідної. Вихідною змінною об'єктів з розподіленими параметрами звичайно є визначальний параметр, розподілений в просторі. Наприклад, в моделях теплових об'єктів з просторовим розподіленням температури, визначальним параметром, а значить і виходом об'єкта, є розподілена в просторі температура, як правило, в певній точці простору  $(\theta(x, t)|_{x=x_1})$ .

Входами об'єктів є зовнішні зміни, що впливають на їх визначальний параметр, і, звичайно, їх вплив визначають граничні умови. Для теплових об'єктів як вхідний параметр є температура одного із середовищ, з яким контактує об'єкт, наприкладі гранична умова (8.129):

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (\theta_0(t) - \theta(x, t)|_{x=0}). \quad (8.163)$$

У цьому випадку входом об'єкта може бути температура зовнішнього середовища  $\theta_0(x)$ , якщо  $\theta(x, t)$  – визначальний параметр. Для отримання передаточної функції каналу  $\theta_0(x) - \theta(x, t)$  з динамічної моделі яку представлено рівнянням динаміки нескінченно малої акумулюючої області та рівняннями граничних умов (наприклад (8.163)), необхідно звести ці рівняння в одне і розв'язати його відносно вихідної величини та провести перетворення рівнянь. При зведенні рівняння динаміки нескінченно малої акумулюючої області та граничних умов, виникає необхідність у розв'язанні рівняння динаміки, тобто його інтегруванні і визначенні його констант інтегрування з використанням граничних умов.

Рівняння динаміки нескінченно малої акумулюючої області можна записати в приростах, що забезпечує у цьому випадку полегшення перетворення Лапласа в зв'язку з нульовими початковими умовами всіх змінних та їх похідних у цьому випадку.

Детальніше методику отримання передаточних функцій об'єктів з розподіленими параметрами розглянемо для рівняння динаміки одномірного теплового потоку в декартовій системі координат, отриманого з рівняння динаміки з врахуванням, що:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0; \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

З врахуванням цього рівняння маємо:

$$a \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = - \frac{q(t)}{\rho c}. \quad (8.164)$$

Граничні умови:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 [\theta_0(t) - \theta(x, t) \Big|_{x=0}], \quad (8.165)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha_1 [\theta(x, t) \Big|_{x=\delta} - \theta_1(t)]. \quad (8.166)$$

Така модель має місце, наприклад, під час моделювання теплового потоку через товсту однорідну стінку з температурами зовнішніх середовищ з одного боку  $\theta_0(t)$ , а з другого -  $\theta_1(t)$ . Розподілена на товщині стіни температура  $\theta(x, t)$  буде вихідною величиною, а температури середовищ, з якими контактує стінка -  $\theta_0(t)$  та  $\theta_1(t)$ , будуть входами. Таким чином, можна виділити два канали впливу з передаточними функціями:

$$W_1(s) = \frac{\Delta \theta(x, s)}{\Delta \theta_0(s)}, \quad (8.167)$$

$$W_2(s) = \frac{\Delta \theta(x, s)}{\Delta \theta_1(s)}. \quad (8.168)$$

Розглянемо отримання передаточної функції (8.167) із рівняння динаміки нескінченно малої акумулюючої області та граничних умов (8.165) та (8.166).

Запишемо у приростах рівняння динаміки (8.164) та граничних умов (8.165) та (8.166):

$$a \frac{\partial^2 \Delta\theta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \Delta\theta(x,t)}{\partial t} = -\frac{\Delta q(t)}{\rho c}; \quad (8.169)$$

$$-\lambda \frac{\partial \Delta\theta(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (\Delta\theta_0(t) - \Delta\theta(x,t) \Big|_{x=0}); \quad (8.170)$$

$$-\lambda \frac{\partial \Delta\theta(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha_1 (\Delta\theta(x,t) \Big|_{x=\delta} - \Delta\theta_1(t)). \quad (8.171)$$

Перетворимо ці рівняння за Лапласом, приймаючи  $\frac{\partial}{\partial t} = s$  та позначити

$$\Delta\theta(x,t) = \theta(x,t); \Delta q(t) = q(t). \Delta\theta_0(t) = \theta_0(t); \Delta\theta_1(t) = \theta_1(t);$$

$$a \frac{d^2 \theta(x,p)}{dx^2} - p\theta(x,p) = -\frac{q(p)}{\rho c}, \quad (8.172)$$

$$-\lambda \frac{d\theta(x,p)}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (\theta_0(p) - \theta(x,p) \Big|_{x=0}), \quad (8.173)$$

$$-\lambda \frac{d\theta(x,p)}{dx} \Big|_{x=\delta} = \alpha_1 (\theta(x,p) \Big|_{x=\delta} - \theta \Big|_{x=\delta} - \theta_1(p)). \quad (8.174)$$

Вираз (8.172) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку. Його розв'язок має вимушену  $\theta_{\text{вим}}$  і вільну  $\theta_{\text{в}}$  складові:

$$\theta(x,p) = \theta_{\text{вим.}} + \theta_{\text{в}}; \quad (8.175)$$

$$\theta_{\text{вим.}} = -\frac{q(p)}{p\rho c}; \theta_{\text{в}} = C_0 e^{S_1 x} + C_1 e^{S_2 x},$$

де  $S_1$  та  $S_2$  – корені характеристичного рівняння

$$\frac{a}{s} \overset{=2}{S} + 1 = 0, \quad \bar{S} = \frac{d}{dx}. \quad (8.176)$$

Звідси

$$S_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{s}{a}}. \quad (8.177)$$

Вираз (8.175) з врахуванням (8.176) та (8.177):

$$\theta(x, p) = -\frac{q(p)}{p\rho c} + C_0 e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} + C_1 e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}} \quad (8.178)$$

Константи інтегрування  $C_0$  та  $C_1$  визначимо із граничних умов (8.173) та (8.174). Для цього із виразу (8.178) знайдемо похідну

$$\frac{d\theta(x, p)}{dx} = C_0 \sqrt{\frac{p}{a}} e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} - C_1 \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (8.178)$$

Підставимо вирази (8.178) та (8.179) в рівняння граничних умов (8.173) та (8.174):

$$\begin{aligned} & -\lambda \left( C_0 \sqrt{\frac{s}{a}} e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}} - C_1 \sqrt{\frac{s}{a}} e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}} \right)_{x=0} = \\ & = \alpha_0 \left[ \theta_0(s) - \left( -\frac{q(s)}{\rho c} + C_0 e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}} - C_1 e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}} \right)_{x=0} \right]; \\ & -\lambda \left( C_0 \sqrt{\frac{s}{a}} e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}} - C_1 \sqrt{\frac{s}{a}} e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}} \right)_{x=\delta} = \\ & = \alpha_1 \left[ \left( \frac{q(s)}{\rho c} + C_0 e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}} + C_1 e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}} \right)_{x=\delta} - \theta_1(s) \right]. \end{aligned}$$

Після підстановки значень  $\bar{X} = 0$  та  $\bar{X} = \delta$ , що відповідають граничним умовам, отримаємо:

$$\begin{aligned} -\lambda \left( C_0 \sqrt{\frac{s}{a}} - C_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) &= \alpha_0 \left[ \theta_0(s) + \frac{q(s)}{\rho c} - C_0 - C_1 \right]; \\ -\lambda \left( C_0 \sqrt{\frac{s}{a}} e^{\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} - C_1 \sqrt{\frac{s}{a}} e^{-\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \right) &= \\ &= \alpha_1 \left[ -\frac{q(s)}{\rho c} + C_0 e^{\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} + C_1 e^{-\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} - \theta_1(s) \right]. \end{aligned}$$

Згрупуємо складові цих рівнянь з константами  $C_0$  та  $C_1$ :

$$\left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) C_0 + \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) C_1 = \theta_0(p) - \frac{q(p)}{\rho c}, \quad (8.180)$$

$$\left( \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} + 1 \right) e^{\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} C_0 - \left( \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} - 1 \right) e^{-\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} C_1 = \frac{q(s)}{\rho c} + \theta_1(s). \quad (8.181)$$

Розв'язання рівняння (8.180) та (8.181) відносно  $C_0$  та  $C_1$ , отримаємо:

$$C_0 = \frac{\left( \theta_1(s) - \frac{q(s)}{\rho c} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - \left( \theta_0(s) - \frac{q(s)}{\rho c} \right) e^{-\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}{\left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) e^{\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - e^{-\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}, \quad (8.182)$$

$$C_1 = \frac{\left( \theta_0(s) - \frac{q(s)}{\rho c} \right) e^{\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - \left( \theta_1(s) - \frac{q(s)}{\rho c} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}{e^{\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - e^{-\delta \sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}.$$

Вираз (8.189) зв'язує вихідну  $\theta(x, s)$  з трьома вхідними  $q(s)$ ,  $\theta_0(s)$  та  $\theta_1(s)$ . Із цього виразу можемо отримати відповідно три передаточні функції. Розглянемо отримання однієї з них, наприклад, каналу  $\theta_0(s) \rightarrow \theta(x, s)$ :

$$W(s) = \frac{\theta(x, s)}{\theta_0(s)} = \left( \frac{(1 + b\beta s)e^{\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)s} - (1 - b\beta s)e^{-\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)s}}{(1 + bs)(1 + b\beta s)e^s - (1 - bs)(1 - b\beta s)e^s} \right), \quad (8.184)$$

де

$$\bar{P} = \delta \sqrt{\frac{s}{a}}; b = \frac{\lambda}{\alpha_0 \delta}; \beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}. \quad (8.185)$$

Після підстановки констант інтегрування  $C_0$  та  $C_1$  остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} \theta(x, s) = & \frac{q(s)}{s\rho c} + \\ & + \frac{\left( \theta_1(s) - \frac{q(s)}{s\rho c} \right) \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}} - \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}} \right]}{e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right)} + \\ & + \frac{\left( \theta_0(s) - \frac{q(s)}{s\rho c} \right) \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{s}{a}}} + \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{s}{a}}} \right]}{e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}. \end{aligned}$$

Передаточну функцію (8.184) можна подати з використанням гіперболічних функцій:



$$W(s) = \frac{\theta(x, s)}{\theta_0(s)} = \frac{Sh\left[\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right] + b\beta s Ch\left[\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right]}{\left(1 + b^2\beta s^2\right)Shs + b\overline{\overline{P}}(1 + \beta)Ch\overline{\overline{P}}}, \quad (8.186)$$

де

$$Sh\overline{\overline{P}} = \frac{e^{\overline{\overline{P}}} - e^{-\overline{\overline{P}}}}{2}; \quad Sh\overline{\overline{P}} = \frac{e^{\overline{\overline{P}}} + e^{-\overline{\overline{P}}}}{2};$$

$$Sh\left[\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right] = \frac{e^{\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}} - e^{-\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}}}{2},$$

$$Sh\left[\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right] = \frac{e^{\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}} + e^{-\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}}}{2}.$$

Часові характеристики будуються на базі розв'язку їх рівнянь динаміки. У зв'язку з чим, для побудови часових характеристик об'єктів з розподіленими параметрами виникає необхідність розв'язання їх рівнянь динаміки. Однак, для диференціальних рівнянь в частинних похідних аналітичного розв'язку отримати не можливо.

Чисельний метод розв'язування рівнянь динаміки з отриманням часових характеристик передбачає:

1. Числовий вираз коефіцієнтів такого рівняння, тобто прив'язка рівняння динаміки для конкретного об'єкта;
2. Представлення аналогових (неперервних) функцій і самого рівняння у дискретному вигляді;
3. Числовий вираз граничних та початкових умов;
4. Чисельне розв'язування на ЕОМ дискретного рівняння з використанням граничних та початкових умов.

Для перетворення рівняння динаміки до дискретного вигляду, необхідно виконати дискретизацію незалежних змінних, вхідних та вихідних функцій, їх похідних та самого рівняння.

Незалежними змінними є час  $t$  та одна або декілька просторових координат, наприклад, координата  $\bar{X}$ .

Почнемо з дискретизації незалежних змінних  $t$  та  $X$ .

Вводимо крок дискретизації часу  $\Delta t = \tau$  і просторової координати  $\Delta x = h$ . Поточне значення часу:

$$t = \nu\tau, \quad (8.187)$$

де  $\nu$  - номер кроку  $\tau$  з часу.

Значення просторової координати  $\bar{X}$  можна записати

$$\bar{X} = S h, \quad (8.188)$$

де  $S$  - номер кроку  $h$  вздовж координати  $\bar{X}$ .

Якщо в рівнянні динаміки є вхідна функція  $\theta_1(t)$ , вихідна функція  $\theta(x, t)$ , а також перша та друга частинні похідні вихідної функції  $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}$  та  $\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}$ , то необхідно розглянути дискретне наближення цих функцій та похідних.

$$\theta_1(t)|_{t=\nu\tau} \cong \theta_\nu^1; \theta(x, t)|_{x=sh, t=\nu\tau} \cong \theta_{s, \nu}. \quad (8.189)$$

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \cong \frac{\theta_{s, \nu+1} - \theta_{s, \nu}}{\tau} = \Delta_\tau^+. \quad (8.190)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) \cong \frac{\Delta_x^+ - \Delta_x^-}{h}, \quad (8.191)$$

$$\Delta_x^+ = \frac{\theta_{s+1, \nu} - \theta_{s, \nu}}{h}, \quad \Delta_x^- = \frac{\theta_{s, \nu} - \theta_{s-1, \nu}}{h}.$$

З врахуванням наведеного:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\theta_{s+1, \nu} - 2\theta_{s, \nu} + \theta_{s-1, \nu}}{h^2}. \quad (8.192)$$

Приклад 8.18. Розглянемо перетворення до дискретної форми динамічної моделі

$$a \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}. \quad (8.193)$$

Граничні:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha \left[ \theta^1(t) - \theta(x, t) \Big|_{x=0} \right] \quad (8.194)$$

та початкові умови:

$$\theta(x, t) \Big|_{t=0} = \theta^0(x). \quad (8.195)$$

Підставимо в рівняння динаміки (8.194) вирази (8.190) та (8.193):

$$a \frac{\theta_{s+1,v} - 2\theta_{s,v} + \theta_{s-1,v}}{h^2} = \frac{\theta_{s,v+1} - \theta_{s,v}}{\tau}.$$

Визначимо із нього вихідну функцію  $\theta_{s,v}$  на наступному кроці часу  $\theta_{s,v+1}$ :

$$\theta_{s,v+1} = \frac{a\tau}{h^2} (\theta_{s+1,v} + \theta_{s-1,v}) - \left( 2 \frac{a\tau}{h^2} - 1 \right) \theta_{s,v}. \quad (8.196)$$

Для граничної умови (8.195) отримаємо:

$$-\lambda \frac{\theta_{s+1,v} - \theta_{s,v}}{h} \Big|_{x=0} = \alpha (\theta_v^1 - \theta_{s,v} \Big|_{s=0})$$

або

$$-\frac{\lambda}{\alpha h} (\theta_{1,v} - \theta_{0,v}) = \theta_v^1 - \theta_{0,v},$$

звідки

$$\theta_{0,v} = \frac{\frac{\lambda}{\alpha h} \theta_{1,v} - \theta_v^1}{\frac{\lambda}{\alpha h} + 1}. \quad (8.197)$$

Початкову умову вихідної функції (8.196) можна в дискретній формі записати:

$$\theta(x, t)|_{t=0} = \theta_{s,v}|_{v=0} = \theta_{s,0}. \quad (8.198)$$

Отримані вирази (8.196), (8.197) та (5.198) представляють дискретну математичну модель або алгоритм реалізації на ЕОМ динамічної моделі об'єкта з розподіленими параметрами.

Величина кроку дискретизації неперервних змінних як залежних, так і незалежних суттєво впливає на точність дискретного моделювання неперервних функцій та рівнянь.

Існує максимально допустимий для відповідної функції крок, якщо крок дискретизації буде більшим допустимого, то отримувана дискретна функція не буде відображати початкову аналогову. З іншого боку, моделювання на ЕОМ об'єктів з розподіленими параметрами забирає значний час, у зв'язку з тим, що моделі таких об'єктів мають як мінімум дві незалежні змінні, наприклад  $t$  та  $x$ , і для визначення значень вихідної величини, наприклад  $\theta(x, t)$ , доводиться робити кроки вздовж просторової змінної  $x$ , а потім –  $t$ , тобто в розрахунках проводити покриття певної площини з координатами  $x, t$ . У зв'язку з чим малий крок із змінних  $x$  та  $t$  різко збільшує час обчислення.

*Контрольні запитання:*

- 1) Навести приклад об'єктів з розподіленими параметрами та визначити їх особливості.
- 2) Навести приклади математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами.
- 3) Надати класифікацію математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами.

4) Статичні моделі об'єктів з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.

5) Визначити моделі об'єктів з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.

6) Визначити передаточну функцію об'єктів з розподіленими параметрами. Наведіть приклади її отримання.

7) Визначити частотні характеристики об'єкт з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.

8) Визначити часові характеристики об'єкт з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.

9) Визначити дискретне представлення рівнянь динаміки об'єктів з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.

10) Надайте аналітичний запис математичних моделей ідеальних елементів.

11) В чому полягає лінеаризація систем та надайте приклад виконання процедури лінеаризації?

12) Дайте формулювання передаточної функції та наведіть приклад отримання передаточної функції «вхід-вихід» лінеаризованої системи на основі використання математичної моделі системи, представленої у вигляді диференційного рівняння.

13) Наведіть види передаточної функції динамічних елементів.

14) Визначити структурну схему об'єктів ідентифікації та систем управління ними. Наведіть приклад.

15) В чому полягає задача спрощення передаточної функції? Наведіть приклад.

16) Визначити поняття стану динамічної системи. Надати структурну схему системи. Навести приклад.

17) Визначити поняття фундаментальної матриці або перехідної матриці стану. Навести алгоритм її отримання.

18) Визначити поняття математичної моделі системи у вигляді диференціальних рівнянь стану. Навести приклади.

19) Визначити зв'язок між передаточною функцією системи і рівняння стану. Навести приклади.

20) Визначити головні характеристики і перехідну матрицю стану. Навести алгоритм їх отримання.

21) Визначити дискретний спосіб обчислення часових характеристик . Наведіть приклад.

22) Наведіть математичні основи векторно-матричного представлення моделі у змінних стану. Навести приклади.

23) Навести алгоритм отримання рівнянь стану, використовуючи метод розкладу на прості множники. Наведіть приклад.

24) Визначити характеристичне рівняння системи та навести приклад його отримання.

25) Сформулювати поняття функціональної системи розв'язків та наведіть приклад її отримання.

#### *Література до розділу*

1. Бишоп
2. Методы классической и современной теории автоматического управления. Том 1//Под ред. Н.Д. Егупова, М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000, 747 с.
3. Остапенко Ю.О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування. К.: Задруга, 1999.-424 с.
4. Ладієв Р.Я., Остапенко Ю.А., Кубрак А.І., Кваско М.З. Математичний опис об'єктів с розподіленими параметрами 4.3. – Київ: КПІ, 1974.- 149 с.
5. Кубрак А.І., Жученко А.І., Ярошук Л.Д. Методи и програми для дослідження системи автоматизації.- К.: УМК ВО. 1989-228 с.

## Розділ 9. Методи ідентифікації динамічних об'єктів.

### 9.1. “Of-line” ідентифікація динамічних об'єктів

#### 9.1.1 Активна ідентифікація динамічних об'єктів

Будь-яка реальна система завжди складніша ніж її математична модель. Якщо розглядати задачу ідентифікації, як задачу довільної апроксимації відображення множини вхідних сигналів  $u(t)$  об'єкта в множину вихідних  $Y(t)$ , то тут має місце принцип множинності моделей( ситуація «чорної скриньки»). Існує безліч типів і структур у вибраному типі моделей, які( за відповідної оптимізації їх параметрів) задовольняють вимогу близькості вихідних сигналів  $Y(t)$  об'єкта і  $Y_M(t)$  моделі. При такій постановці задачі структура і параметри моделі можуть не мати нічого спільного з структурою і параметрами реального об'єкта. Наприклад , об'єкт, що являє собою оператор  $e^{-p\tau}$  запізнення у часі синусоїдальний сигнал  $U_m \sin \omega t$  на виході, за умови що  $\tau < \frac{\dot{O}}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ , може мати модель у вигляді передаточної інерційної ланки першого порядку

$$W_M(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1},$$

яка точно відобразить вихідний сигнал об'єкта  $Y_m \sin(\omega(t - \tau))$ , де

$$Y_m = U_m, \quad \text{якщо} \quad \frac{k}{\sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1}} = 1 \quad \text{і} \quad \varphi = -\arctg \omega \tau_1 = -\omega \tau. \quad \text{При цьому}$$

структура об'єкта і моделі зовсім різними. Виявити неадекватність моделі об'єкту можливо, якщо на вхід їх подавати більш інформативний ніж сигнал синусоїди, наприклад  $U_m \operatorname{sign} \sin(\omega t)$ . Тоді за будь-яких  $k$  і  $\tau_1$  моделі неможливо забезпечити співпадання виходів об'єкта і моделі. Співпадання з точністю до малої величини  $\varepsilon$  може бути досягнуто шляхом пошуку структури моделі подібної до структури об'єкта. Але на об'єкт окрім вхідного впливу  $U(t)$  діє ще нескінченно велика кількість інших зовнішніх впливів. Тому, для визначення моделі конкретної структури, слід об'єкт ввести в такий стан, за якого невраховано в моделі впливи будуть зневажливо малими. В такій ситуації з точністю до  $\varepsilon$  можна

вважати ідентичність об'єкта і моделі. При цьому модель і її коефіцієнти мають конкретний фізичний зміст. Наприклад, літак, що летить горизонтально в спокійній атмосфері на короткому відрізку часу при невеликих відхиленнях стійкого стану під дією вхідного впливу(рулі висоти) відносно вихідної змінної з точністю до  $\epsilon$  може бути представлений ланкою другого порядку

$$W_M(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0},$$

коефіцієнти  $b_i, a_i (i = 0, 1)$ , які будуть мати конкретний фізичний зміст. Наприклад  $a_0$  помножене на конструктивні параметри літака, це запас аперіодичної стійкості(нормована відстань між центром мас і аеродинамічним фокусом) літака і т.ін.

Таким чином для об'єктивного визначення фізичних параметрів реального об'єкта ідентифікації необхідно:

- ввести об'єкт в стан, де суттєвими будуть тільки ті змінні, які враховано в моделі;
- подати на вхід об'єкта і моделі керуючі впливи, які забезпечать однозначність оцінок коефіцієнтів моделі об'єкта.

В цих двох пунктах і полягає поняття активного експерименту.

Модель у вигляді передаточної функції по даним активного експеримента може бути одно-кроковою, коли передаточна функція визначається безпосередньо з експеримента або дво-кроковою, коли з експеримента визначається непараметрична оцінка перехідної чи імпульсивної перехідної функції або амплітудно-частотна характеристика ( I крок), а далі по ній ( II крок) визначається передаточна функція.

## 9.1.2.

### **Визначення імпульсної перехідної функції кореляційним методом.**

Вихідні змінні об'єкта  $y(t)$  визначаються не тільки як наслідок дії детермінованого керуючого вхідного сигналу  $u(t)$ , але і поміхи  $e(t)$ . (рис 9.1).



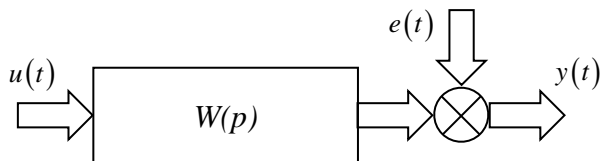


Рис. 9.1

Всі видимі перешкоди, що діють на різні частини об'єкта, приведені до виходу об'єкта та представлено у вигляді адитивного шуму. Значення вихідного сигналу

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) u(t - \tau) d\tau + e(t), \quad (9.1)$$

де  $\omega(\tau)$  - імпульсивна перехідна функція.

Помноживши (9.1) на  $x(t + \tau)$  та проінтегрувавши обидві частини по  $\tau$  в межах  $(\pm\infty)$ , одержуємо:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) dt + R_{ue}(\tau). \quad (9.2)$$

Якщо  $R_{ue}(\tau) = 0$  та  $\omega(t) = 0$ , при  $t < 0$  (умова фізичної реалізованості системи), то

$$R_{y,u}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) dt, \quad (9.3)$$

яке називається рівнянням Віннера-Хопфа.

Це лінійне інтегральне рівняння першого роду. Його числове рішення здійснюється методом апроксимуючих функцій, обчислення яких здійснюється на основі методу найменших квадратів. Вирішення рівняння дає вираження для функції ваги  $\omega(t)$ , тобто імпульсної перехідної функції об'єкта.

Розглянемо рішення рівняння (9.3), використовуючи його дискретний аналог

$$R_{yu}(m) = \sum_{k=0}^n \omega(k) R_u(m - k) \Delta\tau, \quad (9.4)$$

де  $\Delta t$  - інтервал дискретизації кореляційних функцій.

Позначимо:

$$R_{u,u} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(n-1) \\ R_{uu}(0) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{uu}(n-1) & R_{uu}(n-2) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix}; \quad (9.5)$$

$$W = \begin{pmatrix} \omega(1) \\ \omega(2) \\ \vdots \\ \omega(n) \end{pmatrix}; R_{y,u} = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{pmatrix}; \quad (9.6)$$

де  $r(i) = \frac{R_{y,u}(i)}{\Delta\tau}$ .

Тоді (9.4) можна записати в матричному вигляді

$$R_{y,u} = R_{u,u} w \quad (9.7)$$

звідки шукаємо значення  $\omega(1), \dots, \omega(n)$  функції ваги будуть дорівнювати

$$w = R_{u,u}^{-1} R_{y,u}. \quad (9.8)$$

В силу слабкої обумовленості матриці  $R_{u,u}$  рішення рівняння (9.8) нестійке, що приводить до великих похибок рішення за малих змін коефіцієнтів матриць  $R_{y,u}$  та  $R_{u,u}$ .

Більш точне рішення може бути отримане методом апроксимуючих функцій з використанням методу колокації. Відповідно до цього методом апроксимують функцію ваги лінійною комбінацією з  $m$  ортогональних функцій  $\gamma_k(t)$ :

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (9.9)$$

та обчислюють функції  $f_k(t)$

$$f_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau) R_{uu}(t-\tau) d\tau. \quad (9.10)$$

Метод колокації дає систему з  $m$  лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів  $\alpha_k$  апроксимуючої функції:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k(i) = R_{yi}(i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9.11)$$

Оскільки в експерименті отримуються оцінки кореляційної функції, значення шуканої функції ваги являється наближенням. Структура рівняння Віннера-Хопфа така, що незначні помилки в визначенні кореляційних функцій призводять до значних помилок у визначенні імпульсної перехідної характеристики  $\omega(t)$ . Для покращення результату бажано оцінку кореляційних функцій  $R_{uy}, R_{uu}$  апроксимувати аналітичними залежностями виду

$$R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a|\tau|}, R_{ui}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a\tau^2}, R_{iu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a|\tau|} \cos \frac{2\pi}{T} \tau$$

Ефективним є використання кореляційного методу для визначення запізнювання в об'єкті керування. Величина запізнення буде дорівнювати значенню аргументу взаємної кореляційної функції, за якого вона досягає максимуму.

**Приклад 9.1.** Проведемо активну ідентифікацію кореляційним методом об'єкта з передаточною функцією:

$$W(p) = \frac{2,5}{(p+0,1)(p^2+6p+25)}.$$

Програма ідентифікації:

k=2.5; p1=-1; p2=-3+4\*I; p3=-3-4\*I;

p=[p1 p2 p3];

wo=zpk([],p,k);

[nun,den]=tfdata(wo,'v');

wo=tf(nun,den,'td',10);%

tm=700;dt=.01;

t=0:dt:tm;

n=length(t);

u=randn(n,1);%

y=lsim(wo,u,t);%

tau=-tm:dt:tm;

ruu=xcorr(u,u,'biased');%

```

ryu=xcorr(y,u,'biased');%
w=impulse(wo,t);
m=1:5000;
plot(t(m),w(m),t(m),ryu(n:n+4999)/dt),grid

```

Активний експеримент:

Взаємнокореляційна функція  $R_{uy}$  буде дорівнювати функції ваги об'єкта,

якщо кореляційна функція вхідного сигналу буде являтися дельта-функцією.

Таку кореляційну функцію має сигнал типу «білий шум». Якщо подати на вхід об'єкта «білий шум» (рис. 9.2а), який має кореляційну функцію вигляду дельта-імпульса (рис. 9.2б), то взаємнокореляційна функція буде функцією ваги  $\omega(t)$  (рис. 9.3в).

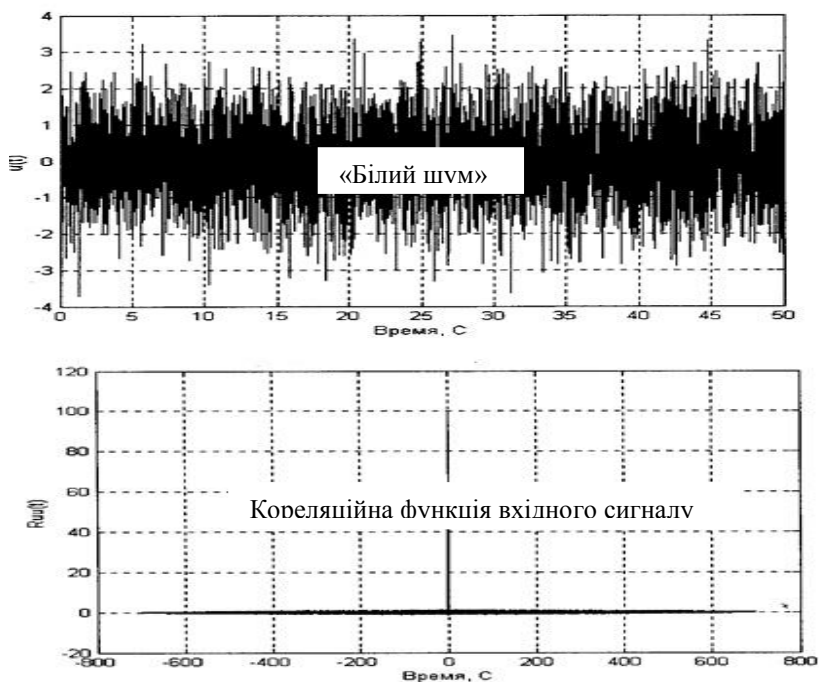


Рис.9.2.(Білий шум (а); Кореляційна функція(б))

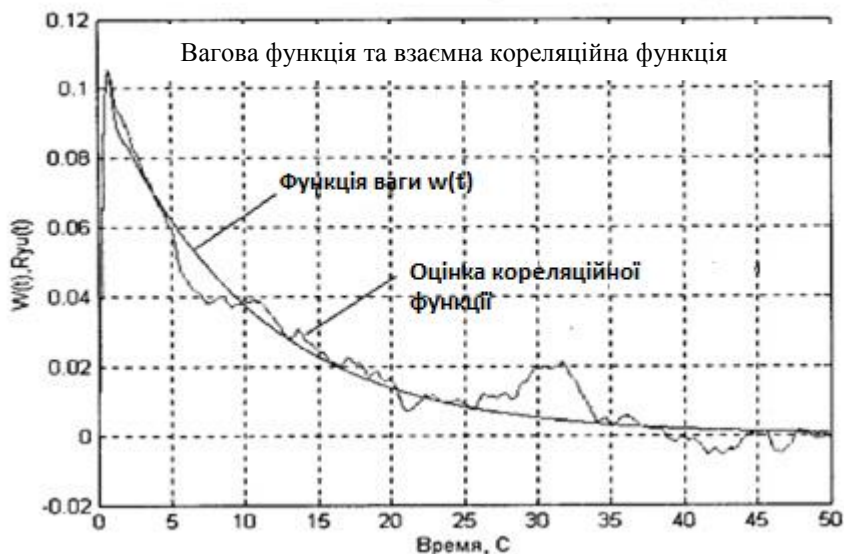


Рис.9.3.Вагова функція та взаємна кореляційна функція

Розходження кривих на рис.9.3. обумовлено неможливістю сформувати на вході об'єкта ідеальний «білий шум» і похибками обчислення кореляційних функцій.

Підвищити точність моделювання випадкового процесу типу «білого шуму» при скороченні довжини вибірки (що є дуже важливим для ідентифікації реальних об'єктів) можна, якщо в якості моделі «білого шуму» застосувати псевдовипадкові сигнали, характеристики яких близькі до «білого шуму» при обмеженій амплітуді і часу дії сигналу.

### 9.1.3 Псевдовипадкові двійкові послідовності максимальної довжини.

**Генерація псевдовипадкових двійкових послідовностей(ПВДП).** Псевдовипадкову двійкову послідовність можна отримати на N розрядному регістрі зсуву з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 9.4)

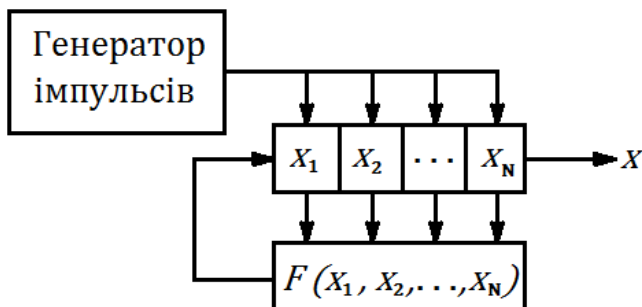


Рис. 9.4 N – розрядний регістр зсуву з від’ємним зворотним зв’зком.

Сигнали з одиничних тригерів підсумовуються за модулем 2, а сигнал, що відповідає результату підсумування, подається на вхід тригера першого розряду. Період  $T$  дискретності цієї послідовності задається генератором імпульсів. Максимальна довжина періоду повтору послідовності

$$L = 2^N - 1,$$

або  $LT$  секунд кожної із комбінацій входу  $x_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Це один із тих станів регістра зсуву, коли у всіх його розрядах зафіксовано одні нулі. У цьому разі генерація ПВДП припиняється. Максимальний для розряду  $N$  період  $L = 2^n - 1$  досягається тільки належним вибором номерів тригерів, з яких подається сигнал на суматор по модулю 2. Так, наприклад, п'ятирозрядний регістр зсуву, який складається з п'яти елементів за початкових умов 11111, видає послідовність  $X$ , довжина періоду повтору якої

$$L = 2^N - 1 = 2^5 - 1 = 31.$$

Для дослідження ПВДП максимальної довжини використовують характеристичний поліном, який визначає тип генератора (Табл. 9.1).

Таблиця.9.1.

**Характеристичні поліноми псевдовипадкових двійкових  
послідовностей максимальної довжини**

Характеристичний поліном	Довжина Д (період)
$D^2 \oplus D^1 \oplus D^0$	3
$D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$	7
$D^4 \oplus D^3 \oplus D^0$	15
$D^5 \oplus D^3 \oplus D^0$	31
$D^6 \oplus D^5 \oplus D^0$	63
$D^7 \oplus D^6 \oplus D^0 \leftrightarrow D^7 \oplus D^4 \oplus D^0$	127
$D^8 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$	255

З практичного погляду дуже зручно відтворювати ПВДП максимальної довжини, використовуючи рівні станів елементів регістра сувої знаками +1 і -1 замість 0 і 1. У цьому випадку логічне додавання за модулем 2 еквівалентне функції множення зі зміною знака рис. 9.6

a'b	A ⊕ b
0 0	0
1 0	1
0 1	1
1 1	0

а)

a'b	A * b
-1 -1	-1
1 -1	1
-1 1	1
1 1	-1

б)

Рис.9.6 (а - додавання за модулем 2; б - множення зі зміною знака добутку)

Розглянемо властивості псевдовипадкових двійкових послідовностей. У ПВДП є  $2^{N-1}$  значень 1 і  $2^{N-1}$  значень 0. Тому можлива комбінація 1 та 0. За винятком комбінації 000... Додавання за модулем два (або множення зі зміною знака добутку) будь-якої послідовності  $x_1$  з послідовністю  $x_2$ , отриманою під час створення послідовності  $x_1$  і зсунутою на один такт., дає послідовність  $x_3$ , яка дорівнює послідовності  $x_1$ , зсунутій на один такт (Рис 9.7).

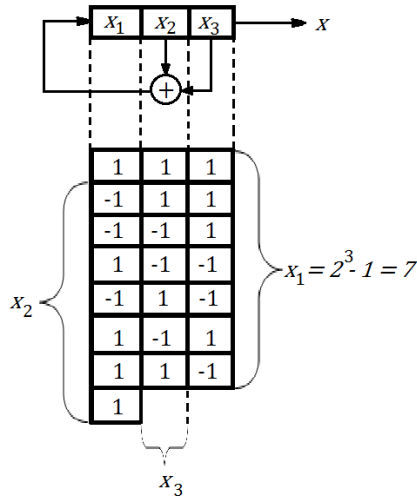


Рис.9.7 Трирозрядний регістр зсуву для генерації ПВДП  
максимальної довжини  $x_1, x_2, x_3$ .

Із рисунка 9.7 видно, якщо  $N=3$ , то період повтору ПВДП  $L=2^3-1=7$ . Тоді за початкових умов 111

$$x_1 = 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1, \dots$$

$$x_2 = -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1, \dots$$

$$x_3 = 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1, \dots$$

Середнє значення ПВДП з рівнями 0 і 1 за період повтору  $L$ .

$$E[x] = \frac{1}{2^{N-1}} - \left\{ \frac{2^N}{2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{2^N}{2^{N-1}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{L} \right).$$

Значення величин  $L$  досить велике, тому  $1/L \approx 0$ . Отже,

$$\hat{A}[x] = \frac{1}{2}.$$

Середнє значення ПВДП з рівнями сигналу +1 і -1 і періодом повтору  $L$



$$E[x] = 1/L \{ 2^{(N-1)} x(1) + (2^{(N-1)} - 1)x(-1) \}.$$

$$1/L \{ 2^{(N-1)} - 2^{(N-1)} + 1 \} = 1/L.$$

Якщо ПВДП має рівні сигнали  $+a$  і  $-a$ , то середнє значення такої послідовності за період повтору  $L$  відповідно буде таким:

$$E[x] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X(i) = \frac{1}{L} a.$$

Оскільки величина періоду повтору  $L$  досить велика, вважаємо, що ця послідовність центрована.

Автокореляційна функція дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  та періодом повтору  $L$ .

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X(i)X(i-k).$$

Як показано, додавання за модулем 2 послідовності  $X_j$  дорівнює  $X_k$  і рівнозначне перемноженню зі зміною знака отриманого добутку, тобто

$$X_i X_j = -X_k.$$

Якщо  $k=0$ , то АКФ дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  дорівнює одиниці:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{O}^2(i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L 3 = 1,$$

якщо  $k \neq 0$ , то

$$R_{xx}(K) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_i X_{j-k} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (-X_i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_j.$$

$$\text{Оскільки } \sum_{j=1}^L (-\tilde{O}_j) = 1,$$

то, якщо  $k \neq 0$ , тоді автокореляційна функція (АКФ) дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  і періодом повтору  $L$  обчислюють таким

чином:  $R_{xx}(k)=1$ , якщо  $k=nL$ ,  $n$  - ціле число; або  $R_{xx}(k)=-\frac{1}{L}$ , якщо  $k \neq nL$ .

Графік дискретної автокореляційної функції зображено на рис.9.8

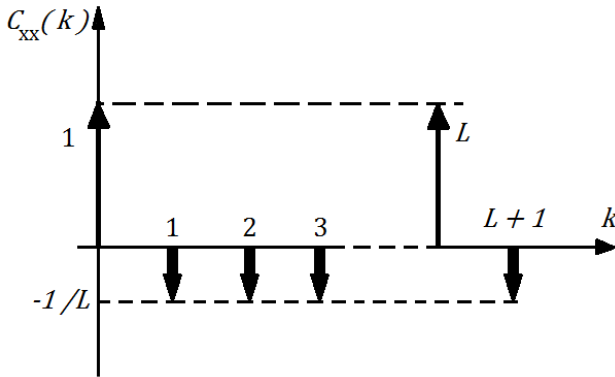


Рис. 9.8 Автокореляційна функція дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1/L$  і періодом повтору  $L$ .

У цьому випадку ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  і періодом повтору  $L$ , сигнал, що подається на систему ідентифікації, матиме вигляд показаний на рисунку 9.9

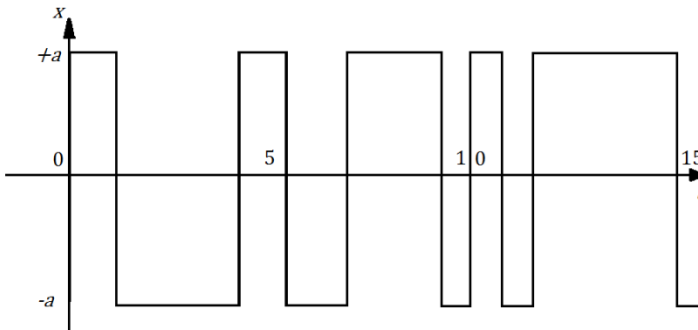


Рис. 9.9 Неперервна ПВДП з рівнями  $-a$  і  $a$  і періодом повтору  $L=15$

Середнє значення неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  і періодом повтору  $L$ .

$$E[x] = -\frac{a}{L}$$

Автокореляційна функція неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  і періодом повтору  $L$ .

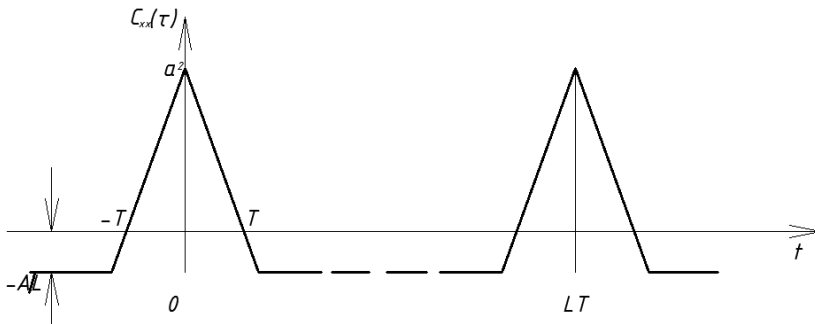
$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{LT} \int_0^{LT} x(t)x(t-\tau)dt, \quad (9.12)$$

якщо  $|\tau| \geq T$ , то випадкові величини  $x(T)$  і  $x(T-\tau)$  відповідають двом різним моментам дискретності і тому АКФ неперервної ПВДП

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{LT} \int_0^{LT} [-ax(T)]dt = -\frac{a^2}{L}.$$

Якщо  $|\tau| < T$ , то  $C_{xx}(\tau) = a^2(1 - (1 - \frac{L+1}{L} \frac{\tau}{T}))$ ,

Графік АКФ неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$  зображено на рис.9.10



9.10 Автокореляційна функція неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$ .

Спектральну щільність ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$ , можна одержати як перетворення Фурє (рис.9.10), яке має висоту

$$H = \frac{a^2(L+1)}{L},$$

із основою  $B=2T$ .

У цьому випадку спектральна щільність такої послідовності  $S_{xx}(f) = a^2 \frac{L+1}{L} T \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2$ , де  $f = 1/T$  – частота генератора,  $T$  – період тактової частоти роботи генератора (інтервал часу між сусідніми зсувами).

Ураховуючи періодичність і неперервність величини  $\frac{a^2}{L}$  між піками АКФ неперервної ПВДП одержимо вираз для обчислення її спектральної щільності.

$$S_{xx}(V) = a^2 \frac{L+1}{L} T \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( f - \frac{n}{LT} \right) - \frac{a^2}{L} (f). \quad (9.13)$$

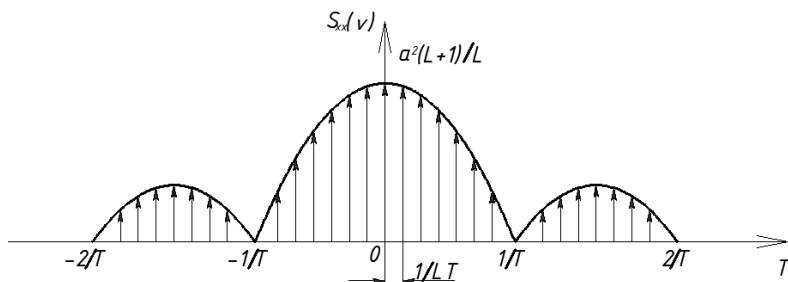


Рис.9.11 Спектральна щільність неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$ . Спектральна щільність має огинаючу виду і вперше перетворюється на нуль, якщо  $v=1/T$ . Кількість спектральних ліній в межах від  $v=0$  до  $v=1/T$  дорівнює  $L$ .

Розширення частотного спектру ПВДП забезпечується збільшенням тактової частоти генератора ПВДП. Простота зміни тактової частоти, а отже й ширина спектру сигналу, дозволила широко використовувати ПВДП як модель «білого шуму».

**Приклад 9.2.** Необхідно визначити імпульсну перехідну функцію збирача рідини (рис. 9.12). У системі (а) рідина

трубопроводом 1 через регулюючий орган (РО) 2 подається у збирач рідини 3, а з нього через технологічний вентиль (ТВ) 4 – на виробництво. За допомогою РО та ТВ у збирачі встановлюються відповідний рівень рідини  $h$ , він реагує як на зміну положення РО, так і положення ТВ. Будемо надалі вважати зміну положення РО керувальним діянням, а зміну положення ТВ - збурювальним. У системі (б) рідина після проходження РО 2 надходить спочатку до довгого трубопроводу 5, а вже з нього – до збирача рідини 3.

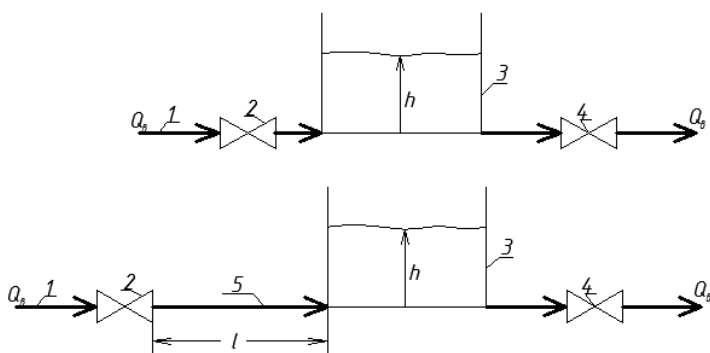


Рис. 9.12 принципові схеми збирача рідини з коротким трубопроводом подачі рідини в збирач (а) і з довгим (б).

Передаточна функція каналу керування «витрата рідини  $Q_n$  – рівень рідини  $h$ » системи «а» і системи «б».

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_0}{1 + T_0 s}. \quad (9.14)$$

$$W(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{k_0 \exp(-pr)}{1 + T_0 s}.$$

Обчислимо значення експериментальної імпульсної перехідної функції системи (а). На вхід цієї системи подано ПВДП із рівняннями +1 і -1 та періодом повтору  $L=31$ .

Рис. 9.13 графік 1 вхідна змінна. Вихідна змінна системи  $y(i)$  відреагувала так, як показано на рис. 9.13 (графік 2)

Експериментальна ПФФ  $W_{el}(i)$  системи 1 пов'язана з її взаємно кореляційною функцією  $R_{yu}(i)$ :

$$\omega_{el}(i) = \frac{L}{a^2(L+1)} R_{yu}(i), \quad (9.15)$$

де  $a$  – амплітуда (рівневхідного сигналу);  $L$  – період повтору ПВДП.

Оскільки період повтору  $L=31$  біт,  $a=1$ , а тривалість  $T=3$ с, то повторення  $L = LT=31*3=93$  с. Підставимо  $L$  у рівняння 9.15. Тоді:

$$\omega_{el}(i) = \frac{93}{1+93} R_{yu}(i) \cong 0,989 R_{yu}(i)$$

$$\omega_{el}(i) \cong R_{yu}(i),$$

Тобто експериментальна ПФФ системи (а) за заданої ПВДП ( $a=1, L=31$ ) майже збігається з (ВКФ) цієї системи:

$$R_{yu}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k} y(i)u(i-k). \quad (9.16)$$

Згідно з формулою (9.16) було обчислено 18 значень неперервної ВКФ системи (а).

Експериментальну ПФФ системи  $a$  можна отримати на підставі АКФ поділивши її значення на  $T=3$ с:

$$R_{el}(i) \cong W(i) = \frac{1}{T} R_{yu}(i) = \frac{1}{3} R_{yu}(k). \quad (9.17)$$

На рис. 9.14 побудовано ПФФ (графік 1), та дві експериментальні для різних поміх у вимірах  $y(\psi)$ . Збільшити точність вказаних функцій можна, збільшивши період повторення ПВДП.

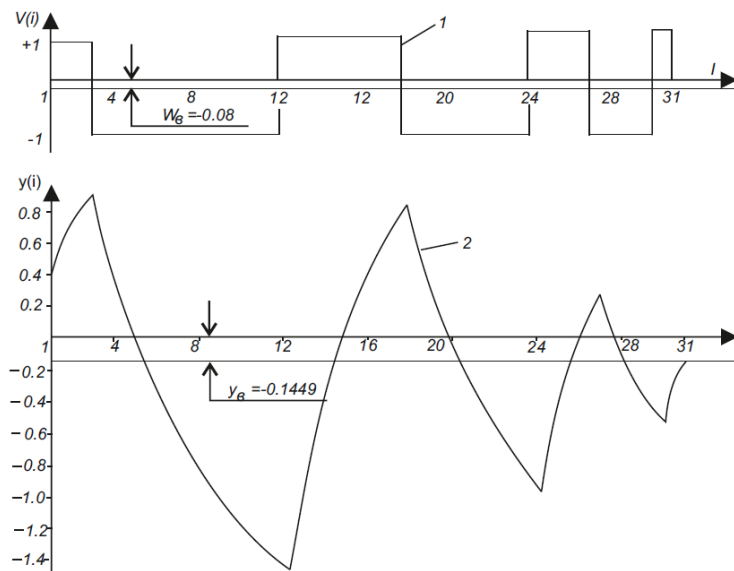


Рис. 9.13 Реалізація вхідної (графік 1) і вихідної (графік 2) змінних системи

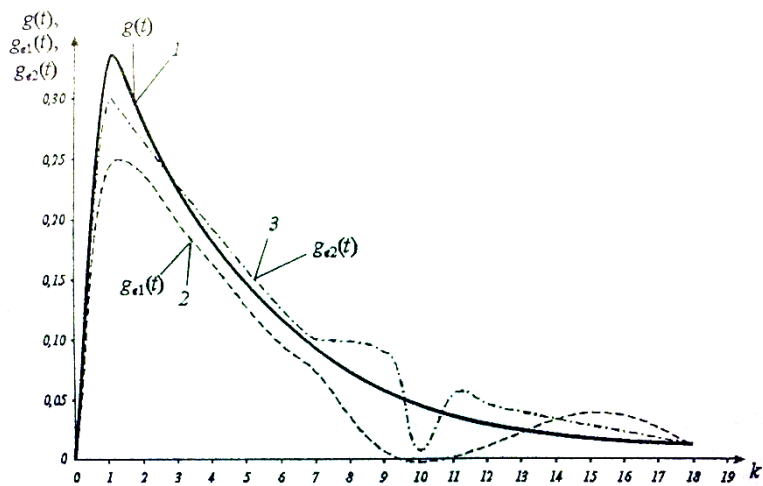


Рис. 9.14 Імпульсні перехідні функції збирачарідини:

1 – істинна; 2 і 3 експериментальні.

Для об'єкта зі запізненням  $\tau$  внаслідок довгого трубопровода подачі рідини (рис. 9.12,б) результат буде аналогічним, тільки ПФ і її оцінку будуть зсунуті у часі на  $\tau$ .

#### **9.1.4. Отримання непараметричних оцінок перехідної функції (ПФ) і АФЧХ в режимі активної ідентифікації.**

При плануванні експерименту вибирають метод дослідження динаміки об'єкта, а також вид випробовуваного детермінованого (із заздалегідь відомим характером зміни) впливу. Для прискорення визначення динамічних характеристик зазвичай використовують метод перехідних характеристик. Цей метод простий і дозволяє отримати динамічні характеристики об'єкта за короткий проміжок часу.

**Визначення перехідних функцій (ПФ) об'єкта.** Визначення ПФ об'єкта необхідно робити в робочих режимах для сталих значеннях вхідних  $X_{вх}(0)$  і вихідних  $Y_{вих}(0)$  змінних. При плануванні експерименту оцінюють час проведення одного дослідіу і визначають необхідну кількість дослідів. Якщо динаміка об'єкта досліджується за відсутності перешкод, то на кожному робочому режимі слід знімати не менше чотирьох перехідних характеристик; за наявності перешкод рекомендується записувати, залежно від їх рівня, до десяти перехідних характеристик.

Якщо на останні діють випадкові обурення, то під час експерименту реєструють деяку функцію  $z(t)$ , що складається з випадкового центрованого шуму  $f(t)$  і корисного сигналу  $h(t)$ :

$$z(t) = h(t) + N(t).$$

Для виділення істинної перехідної характеристики використовують методи згладжування. Найбільш простим є згладжування ковзним середнім. Метод ковзаючого середнього полягає в тому, що на деякому інтервалі часу  $l\Delta t$  ( $l$  - будь-яке ціле число, краще парне) здійснюють послідовне усереднення ординат  $z_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) за формулою:



$$\hat{h}\left(i + \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{l+1} \sum_{\beta=0}^l Z(i+\beta), \quad (9.18)$$

де  $i = 0, 1, 2, \dots, n-l$ ;  $\hat{h}$  - оцінки ординат перехідної характеристики  $h(t)$ .

Інтервал  $l\Delta t$  називають пам'яттю лінійного фільтру. Фільтр суттєво послаблює гармоніки функції  $z(t)$  з частотою вище  $2\pi / l\Delta t$ .

Завірного вибору  $l$  виділення перехідної характеристики  $h(t)$  може бути виконано достатньо точно. Зменшення пам'яті проти оптимального значення веде до недостатнього вирівнювання експериментальних даних, а збільшення - до спотворення  $h(t)$  і

втрати частини ординат  $h_j^*$  з індексами  $i \leq \frac{l}{2-1}$  і  $i \geq n-l/2+1$ .

Початкова ділянка  $h(t)$  визначає структуру перехідної функції об'єкта, а кінцева - коефіцієнт посилення об'єкта. Для згладжування ковзальним середнім необхідно починати реєстрацію  $z(t)$  трохи раніше моменту нанесення збурення і припиняти для  $t > T_{\text{зтх}}$ . За цим же міркуванням, для згладжування  $z(t)$  спочатку беруть  $l = 2 \div 4$ , потім візуально оцінюють  $h^*(t)$  і, якщо необхідно, збільшують  $l$ . Потім виконують нормування згладжених характеристик  $h_j(t) = h_j(t)/A_j$ , де  $h_j(t)$  - перехідна згладжена характеристика, експериментально отримана в  $j$ -му досліді;  $A_j$  - амплітуда ступеньки сигналу в  $j$ -му досліді. В результаті дослідів маємо  $q$  перехідних характеристик  $h_j(t)$ , зазвичай відмінних один від одного. Їх необхідно усереднити:

$$h(t) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q h_j(t) \quad (9.19)$$

### **Визначення частотних характеристик.**

Проведення експериментів з визначення АФЧХ з допомогою періодичних впливів пов'язано з технічними складностями, так як тривалість дослідів на одній частоті  $\omega$  в середньому в 5-10 разів більше часу встановлення перехідної функції  $h(t)$ . У зв'язку з цим

необхідно ретельно стабілізувати джерела обурень, контролювати зміщення середньої лінії вихідних коливань.

Експеримент полягає в тому, що випробовуваний періодичний із заданим періодом  $T_{\text{пер}}$  вплив подають на вхід об'єкта доти, доки на його виході не встановляться коливання вихідної величини  $y(t)$  з частотою  $\omega = 2\pi / T_{\text{пер}}$ . Ознакою сталих коливань вихідної величини  $y(t)$  є ідентичність коливань по амплітуді на трьох-п'яти періодах; загальна тривалість дослідів дорівнює  $(6-15)T_{\text{пер}}$ .

Експеримент слід починати з визначення перехідної характеристики об'єкта для отримання АФЧХ на нульовій частоті ( $\omega=0$ ). Потім на вхід об'єкта подають коливання з частотою  $\omega_n$ , за якої зсув фаз між вхідними і вихідними, коливаннями складає  $180^\circ$ . Для знаходження  $\omega_n$  досить об'єкт ввести в режим двопозиційного регулювання з зоною нечутливості, близькою до нуля.

При проведенні експерименту доцільно записувати коливання вхідних і вихідних величин на одному носії.

Важливим фактором при плануванні експерименту є вибір випробовуваного періодичного впливу  $x(t)$ . Бажаним видом вхідних впливів є синусоїдальні коливання. У лінійній системі коливання на виході об'єкта можуть відрізнятися від коливань на вході тільки по амплітуді і фазі. Щоб отримати АФЧХ об'єкта для синусоїдальних коливань, досить обробити вихідні і вхідні коливання для ряду різних частот  $\omega$ . У загальному випадку застосування синусоїдальних впливів  $x(t)=A\sin\omega t$  спрощує наступну обробку результатів експерименту, проте для створення таких сигналів необхідний спеціальний генератор коливань.

*Метод прямокутної хвилі* не вимагає застосування генератора коливань. Періодичні коливання у вигляді прямокутної хвилі можуть створюватися вручну. Однак при використанні цього методу при обробці результатів дослідів доводиться розкладати в ряд Фур'є коливання вхідних і вихідних величин.

### 9.1.5. Визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передаточні функції

Степеневі ряди (ряд Маклорена, ряд за від'ємними степенями) використовують як проміжні етапи ідентифікації динамічних характеристик.

#### Зв'язок коефіцієнтів розкладання в ряд Маклорена передаточної функції з коефіцієнтами передаточної функції

Для нормованої (поділеної на коефіцієнт підсилення в статиці) передаточної функції маємо:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=0}^{N_e} E_i s^i$$

або

$$\frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} = 1 + e_1 s + e_2 s^2 + \dots + e_{N_e} s^{N_e}. \quad (9.20)$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння (9.20) на знаменник передаточної функції:

$$(1 + e_1 s + e_2 s^2 + \dots + e_{N_e} s^{N_e})(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m.$$

Розкриваємо дужки та прирівнюємо коефіцієнти за однакових степенів  $s$ :

$$s^1, e_1 a_1 + e_0 a_1 = b_1;$$

$$s^2, e_2 a_0 + e_1 a_1 + e_0 a_2 = b_2;$$

$$s^3, e_3 a_0 + e_2 a_1 + e_1 a_2 + e_0 a_3 = b_3; \quad (9.21)$$

$$s^{N_e}, e_{N_e} a_0 + e_{N_e-1} a_1 + e_{N_e-2} a_2 + \dots + e_0 a_{N_e} = b_{N_e}.$$

Тут  $a_0 = b_0 = e_0 = 1$ .

Вважатимемо, що коефіцієнти  $a_i$  та  $b_i$  з індексами, що перевищують відповідно  $n$  та  $m$ , дорівнюють нулю. Тоді послідовно розв'язуючи систему (9.21) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{b_1 - e_0 a_1}{a_0}, \\ e_2 = \frac{b_2 - (e_0 a_2 + e_1 a_1)}{a_0}, \\ e_3 = \frac{b_3 - (e_0 a_3 + e_1 a_2 + e_2 a_1)}{a_0}, \\ \dots \\ e_{Ne} = \frac{b_{Ne} - (e_0 a_{Ne} + \dots + e_{Ne-2} a_2 + e_{Ne-1} a_1)}{a_0}. \end{array} \right. \quad (9.22)$$

Враховуючи, що  $a_0 = 1$ , можна записати систему (9.22) в загальному випадку:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = b_1 - e_0 a_1, \\ e_Z = b_Z - \sum_{i=0}^{Z-1} e_i a_{Z-i}, \end{array} \right. \quad 2 \leq Z \leq Ne. \quad (9.23)$$

Таким чином, визначивши коефіцієнти  $e_n$ , за алгоритмом (9.23) можна розрахувати по ним коефіцієнти передаточної функції (9.20)

### **Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передаточної функції з перехідною функцією**

Визначатимемо ряд Маклорена для нормованої передатної функції. Тоді перехідну характеристику нормуємо, тобто зводимо до одиничного коефіцієнта передачі. Як правило, досліджуваний об'єкт має самовирівнювання, графік  $h(t)$  подано на рис. 9.15.

Ряд Маклорена для  $W_{H(s)}$  можна записати так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i W_H(s)}{ds^i} \Big|_{s^i}, \quad (9.24)$$

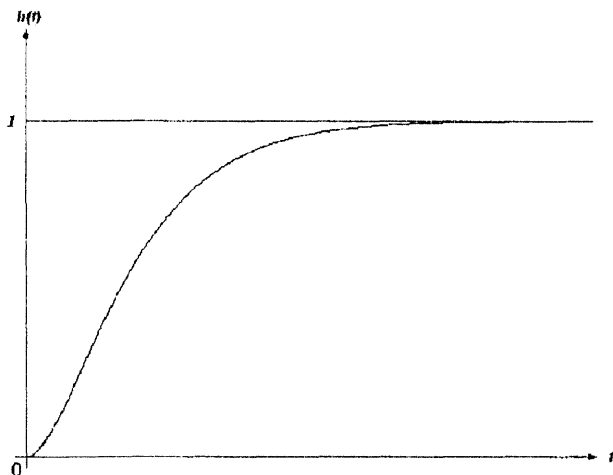


Рис. 9.15. Нормована перехідна характеристика

так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_i s^i, \quad (9.25)$$

або так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i s^i.$$

Тоді

$$E_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i W_H(s)}{ds^i}. \quad (9.26)$$

$$C_i = (-1)^i E_i. \quad (9.27)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} C_0(t) &= h_H(t); \\ C_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} C_0(t) = 1. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Зображення  $L[\bullet]$  за Лапласом:

$$L[C_0 - C_0(t)] = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] e^{-st} dt,$$

або, з урахування виразу (9.28),

$$\frac{C_0}{s} - \frac{W_H(s)}{s} = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] e^{-st} dt.$$

Візьмемо, за правилом Лопіталя, межу, якщо  $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[ -\frac{dW_H(s)}{ds} \right] = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] dt.$$

З рівнянь (9.26), (9.27) для  $i=1$ , маємо:

$$C_1 = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] dt$$

Отже,  $C_1$  є площею між ( $1=C_0$ ) та кривою  $C_0(t) = h_m(t)$  (рис. 9.16)

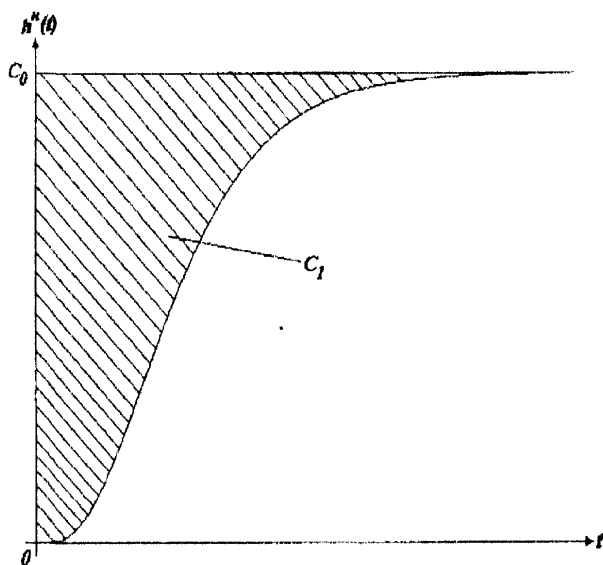


Рис. 9.16.Визначення  $C_1$

Позначимо:

$$C_1(t) = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] dt, \quad C_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} C_1(t).$$

Тоді

$$L[C_1 - C_1(t)] = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] e^{-st} dt$$

або

$$\frac{C_1}{s} - \frac{\frac{1}{s} - \frac{W_H(s)}{s}}{s} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] e^{-st} dt \quad (9.29)$$

Зводимо ліву частину рівняння (9.29) до спільного знаменника та беремо межу при  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_1 s - 1 + W_H(s)}{s^2} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt.$$

Розкриваємо невизначеність у лівій частині, послідовно застосовуючи двічі правило Лопітала:

$$\frac{d^2 W_n(s)}{2ds^2} \Big|_{s=0} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt$$

З урахуванням формул (9.26), (9.27), якщо  $i=2$ ,

$$C_2 = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt.$$

Графічно це показано на рис. 9.17

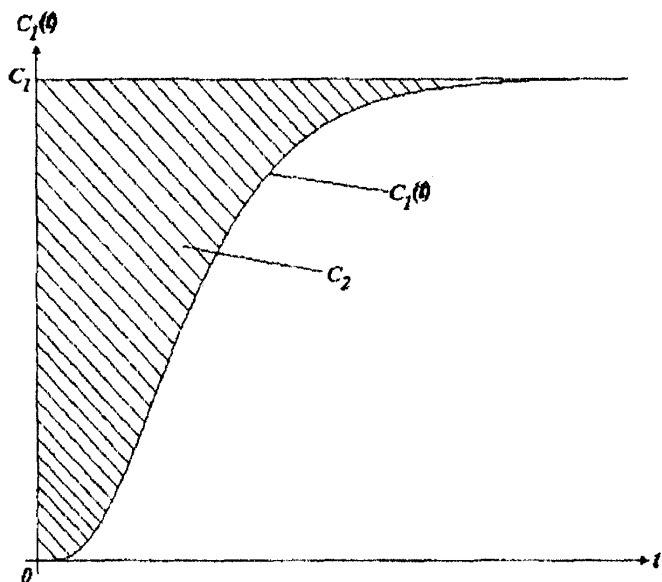


Рис. 9.17. Визначення  $C_2$

Введемо функцію:

$$C_2(t) = \int_0^t [C_1 - C_1(t)] dt, \quad C_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} C_2(t)$$

то аналогічно тому, як для  $C_2$ ,

$$C_3 = \int_0^{\infty} [C_2 - C_2(t)] dt,$$

У загальному випадку

$$C_i = \int_0^{\infty} [C_{i-1} - C_{i-1}(t)] dt. \quad (9.30)$$

А коефіцієнти ряду Маклорена  $E_i$  відповідно дорівнюють:

$$E_i = (-1)^i C_i. \quad (9.31)$$



**Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена розкладання передаточної функції з імпульсною перехідною функцією**

Передаточна функція  $W(s)$  є, як відомо, зображенням за Лапласом імпульсної функції:

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-pt} dt \quad (9.32)$$

Розкладемо  $e^{-st}$  у ряд Маклорена

$$e^{-st} = 1 - ts + \frac{t^2}{2!} s^2 - \frac{t^3}{3!} s^3 + \dots$$

Тоді

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t) dt - s \int_0^{\infty} w(t)t dt + \frac{s^2}{2!} \int_0^{\infty} w(t)t^2 dt - \frac{s^3}{3!} \int_0^{\infty} w(t)t^3 dt + \dots$$

Інтеграл типу  $\int_0^{\infty} w(t)t^i dt$  називають моментом  $s$ -го порядку від імпульсної характеристики:

$$M_i = \int_0^{\infty} w(t)t^i dt \quad (9.33)$$

Тоді

$$W(s) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^i \frac{M_s}{i!} s^i, \quad (9.34)$$

або

$$W(s) = \sum_0^{\infty} E_i s^i, \quad (9.35)$$

де

$$E_i = \frac{(-1)^i}{i!} M_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{\infty} t^i g(t) dt.$$

### Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передаточної функції з амплітудно-фазовою частотою

Нехай, з експерименту маємо для частот  $\omega_i$  ряд точок амплітудно-фазо-частотної характеристики

$$\omega(jw_i) = R_i + jI_i, \quad 0 \leq i \leq m. \quad (9.36)$$

Значення частот  $\omega_i$ , дійсно-частотних  $R_i$  та уявно-частотних характеристик  $I_i$  зосереджено в однойменних масивах  $W$ ,  $R$ ,  $I$ :  
Передавальну функцію будемо шукати у вигляді ряду:

$$\omega(s) = \sum_{i=0}^n e_i s^i. \quad (9.37)$$

Відповідно до неї амплітудно-фазова характеристика дорівнює:

$$\omega(jw) = (e_0 - e_2 w^2 + e_4 w^4 - e_6 w^6) + j(e_1 w - e_3 w^3 + e_5 w^5 - e_7 w^7 + \dots)$$

Візьмемо для прикладу  $n=7$ . Критерій якості  $J$  апроксимації буде сума квадратів відстаней між відповідними базовими та апроксимуючими точками амплітудно-фазових характеристик:

$$J = \sum_{i=0}^m \{ (e_0 - e_2 w_i^2 - e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i)^2 + (e_1 w_i - e_3 w_i^3 - e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i)^2 \} \rightarrow \min. \quad (9.38)$$

Умова мінімуму  $J$  дає систему рівнянь:

$$\frac{dJ}{de_0} = 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) w_i^0 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_1} = 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) w_i^1 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_2} = 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) (-w_i^2) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_3} = 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) (-w_i^3) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{de_4} &= 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) w_i^4 = 0, \\ \frac{dJ}{de_5} &= 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) w_i^5 = 0, \\ \frac{dJ}{de_6} &= 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) (-w_i^6) = 0, \\ \frac{dJ}{de_7} &= 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) (-w_i^7) = 0.\end{aligned}$$

Таблиця 9.1.

$\sum w_i^0$	0	$-\sum w_i^2$	0	$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum R_i w_i^0$
0	$\sum w_i^2$	0	$-\sum w_i^4$	0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	$\sum R_i w_i^1$
$-\sum w_i^2$	0	$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$\sum R_i w_i^2$
0	$-\sum w_i^4$	0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	$\sum R_i w_i^3$
$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$-\sum w_i^{10}$	0	$\sum R_i w_i^4$
0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	0	$-\sum w_i^{12}$	$\sum R_i w_i^5$
$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$-\sum w_i^{10}$	0	$\sum w_i^{12}$	0	$\sum R_i w_i^6$
0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	0	$-\sum w_i^{12}$	0	$\sum w_i^{14}$	$\sum R_i w_i^7$
$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	Праві частини

Під матрицею показано невідомі коефіцієнти при яких є елементи відповідного стовпця матриці. Матриця розпадається на дві незалежних системи для дійсної і уявної складових з яких по

МНК знаходяться парні  $i$ , відповідно, непарні коефіцієнти  $e_i$  ряду (9.37).

**Визначення передаточної функції об'єкта безпосередньо по амплітудно-фазово-частотній характеристиці методом найменших квадратів**

Метод найменших квадратів з його здатністю згладжувати можливі похибки у вихідних даних, використовуваних для ідентифікації динамічного об'єкта, а також з його «терпимістю» до неповної відповідності апроксимуючої структури глибинним властивостям досліджуваного об'єкта можна застосовувати для ідентифікації за рядом точок амплітудно-фазової характеристики.

Нехай є ряд точок  $R_i + jI_i$ ,  $0 \leq i \leq m$ . Тут  $R_i = R(\omega_i)$ ,  $I_i = I(\omega_i)$  – значення дійсно- та уявно-частотних характеристик;  $\omega_i$  – частоти.

Будемо вважати, що коефіцієнт передачі  $k_{ob}$  відомий. Значення  $R_i$ ,  $I_i$ , задані в однойменних масивах, вважатимемо нормованими до одиничного коефіцієнта передачі (поділенням на  $k_{ob}$ ). Тоді апроксимуюча передаточна функція має вигляд:

$$W(s) = \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{Na} s^{Na}}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{Na} s^{Na}} \quad (9.39)$$

Нехай, наприклад,  $N_a = 7$ .

Замінімо в рівнянні (9.39)  $s$  на  $j\omega$ . Тоді для точки з номером  $i$  можна записати:

$$\frac{(1 - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6) + j w_i (b - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6)}{(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) + j w_i (a - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6)} = R_i + j I_i, \quad (9.40)$$

$$0 \leq i \leq m,$$

або

$$\begin{aligned} & [(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) R_i - w_i (a_1 - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6) I_i - \\ & - (1 - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6)] + j [(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) I_i + \\ & + w_i (a_1 - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6) R_i - w_i (b_1 - b_3 w_i^2 + b_5 w_i^4 - b_7 w_i^6)] = 0, \quad (9.41) \end{aligned}$$

$$0 \leq i \leq m.$$

Ліву частину виразу (9.41) можна розглядати як вектор, що з'єднує  $i$ -ту точку амплітудно-фазової характеристики з відповідною їй апроксимуючою. Очевидно, що чим коротшими будуть такі вектори для усієї заданої сукупності точок амплітудно-фазової характеристики – тим краще буде апроксимація. Отже, за критерій якості апроксимації візьмемо середнє-квадратичну норму:

$$\begin{aligned} & \{[(1-a_2w_j^2+a_4w_j^4-a_6w_j^6)R_j-w_j(a_1-a_3w_j^2+a_5w_j^4-a_7w_j^6)I_j - \\ I = & \sum_{i=0}^m -(1-b_2w_j^2+b_4w_j^4-b_6w_j^6)] + [(1-w_j^2+a_4w_j^4-a_6w_j^6)I_j + \\ & + w_j(a_1-a_3w_j^2+a_5w_j^4-a_7w_j^6)R_j - w_j(b_1-b_3w_j^2+b_5w_j^4-b_7w_j^6)]^2 \} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Це – сума квадратів довжин векторів – відхилень між вихідними та апроксимуючими точками. З умови мінімуму (9.42) отримаємо дві незалежних системи нормальних рівнянь МНК, вирішивши які отримаємо шукані коефіцієнти передаточної функції (9.39).

## **9.2. Методи «on-line» ідентифікації передавальних функцій об'єктів.**

### **9.2.1. Ортогональні моделі**

Мова піде про ідентифікацію об'єктів в реальному часі («on-line»), яка має місце в адаптивних системах керування. Для більшої наглядності розглянемо неперервні процеси, які однак, як показано в розділі 4, за необхідністю легко переводяться в дискретні.

Будемо вважати, що параметри об'єкта змінюються у часі набагато повільніше від процесу настройки коефіцієнтів моделі, а процес настройки набагато повільнішим від зміни змінних стану об'єкта. Такий режим називається квазі-стаціонарним.

Для більшої наглядності також змінну Лапласа за нульових початкових умов  $s$  прирівняємо до оператора  $s = p = \frac{d}{dt}$ . Тоді графічно передаточної функції  $W(s)$  та інтегро-диференціальні оператори  $W(p)$  перетворення входу в вихід у часі будуть тотожними, що суттєво спростує представлення структурних схем системи.

Найбільш зручними (в сенсі адаптації складності структури моделей вхід-вихід) є ортогональні моделі:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) U(t), \quad p = d/dt, \quad (9.43)$$

Тут невідомі параметри  $\beta_i$  входять лінійно, а оператори  $W_i(p)$  перетворюють вхідний сигнал  $U(t)$  у систему ортогональних на інтервалі  $T$  з вагою  $w(t)$  функцій  $\{\varphi_i(t)\}$ :

$$\varphi_i(t) = W_i(p)U(t), \quad (9.44)$$

$$\int_0^T w(t) \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ c \neq 0, & i = j, \end{cases} \quad (9.45)$$

Клас вхідних сигналів  $U(t)$  визначає оператори  $W_i(p)$ . Досить просто реалізуються оператори на базі поліномів  $L_n^{(0)}$  Лагерра:

$$L_n^0(\gamma\tau) = \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)} \frac{(-\gamma\tau)^i}{i!(n-i)!}; \quad (9.46)$$

$$W_n(p) = L\{L_n^0(\gamma\tau)\} = \frac{(p-\gamma)^n}{p^{n+1}}. \quad (9.47)$$

Це частковий випадок узагальнених поліномів Лагерра  $L_n^\alpha(x)$  при  $\alpha=0$ ,  $x=\gamma\tau$  або функції Лагерра [ ]:

$$\varphi_n(\gamma\tau) = e^{\frac{\gamma\tau}{2}} L_n^{(0)}(\gamma\tau), \quad (9.48)$$

яким відповідає оператор

$$W_i(p) = L\{\varphi_n(\gamma\tau)\} = \frac{(p-\gamma)^n}{(p+\gamma)^{n+1}}, \quad (9.49)$$

де  $L$ -оператор перетворення Лапласа.

Система поліномів Лагерра  $L_n^{(0)}(\gamma\tau)$  ортогональна на напівскінченній осі  $[0; \infty)$  з експонціальною вагою  $\varphi(\tau) = e^{-\gamma\tau}$ , за

умови, що вхідний сигнал  $U(t)$  має зображення Лапласа, яке не залежить від  $p$ , або постійний фур'є-спектр. Таку умову задовольняє дельта-функція або «білий шум». Практично достатньо забезпечити неперервність  $S_N(\omega)$  у полосі пропускання об'єкта або застосувати формулюючі фільтри  $W_\phi(p)$ , перетворюючі у полосі частот об'єкта сигнал  $U(t)$  у «білий шум». Тоді (9.43) набуває вигляду

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) W_\phi(p) u(t), \quad (9.50)$$

де функції  $\varphi_i(t) = W_i(p) W_\phi(p) U(t)$  взаємно ортогональні.

При переході до дискретного часу операторам  $W_i(p)$  еквівалентні дискретні передаточні функції:

$$W_i(z) = \sum_{j=1}^i \frac{b_{ji} z^{-j}}{1} / \left( \sum_{j=1}^i c_{ji} z^j \right), \quad (9.51)$$

де  $b_{ji}$  і  $c_{ji}$  – коефіцієнти, які вираховують через параметр  $\gamma$  в (9.49) і крок  $\Delta t$ ;  $z^j$  – оператор зсуву часу на  $j\Delta t$ .

Для ускладнення (спрощення) ортогональної моделі достатньо додати (відкинути) один оператор  $W_n(p)$ , не змінюючи інші  $\beta_i$ .

Оптимальне значення  $\beta_i$  (по критерію  $J_{qk}$ ) не залежить від інших коефіцієнтів  $\beta_r (r \neq i)$ . У цьому перевага ортогональних моделей.

До недоліків слід віднести важкість вибору  $\gamma$ , відсутність зв'язку між структурою моделі та структурою протікаючих в об'єкті процесів, вплив невідомих ненульових початкових умов, обмеження застосувань класом одних лише аперіодичних об'єктів.

Якщо  $U(t)$  неперервне, то для визначення передаточної функції моделі

$$W(p) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (9.52)$$

(структура цієї моделі може допускати фізичну інтерпретацію) апроксимуємо сигнали  $U(t)$  і  $y(t)$ , де  $t \in [0; T]$ , за допомогою системи ортогональних функцій  $\{\varphi_i(t)\}$ :

$$u(t) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t), \quad y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \varphi_j(t). \quad (9.53)$$

Зображення за Лапласом відношення  $y(s)$  до  $\varphi(s)$ , тобто передаточну функцію

$$W(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(s) / \sum_{k=0}^n \beta_k \varphi_k(p). \quad (9.54)$$

Приведемо до стандартного вигляду. Так, для поліномів оператора (9.52):

$$b_{m-j} = (-1)^j \sum_{k=j}^m \eta_k^j \alpha_k; \quad a_{n-i} = (-1)^i \sum_{k=j}^n \eta_k^j \beta_k, \quad (9.55)$$

$$\text{де } \eta_k^j = \frac{k(k-1)\dots(k-j-i)}{j}.$$

Точність визначення векторів  $b$  і  $a$  в (9.52) за допомогою формул (9.55) залежить від точності апроксимації сигналів, чисел  $n$  і  $m$  та довжини реалізації. Для зміни структури моделі (9.52) достатньо змінити числа  $n$  і  $m$  у виразі (9.55).

### 9.2.2. Градієнтний метод з паралельною моделлю

Позначимо вихідні сигнали об'єкта  $y_0(t)$ , моделі –  $y_M(t)$ , а спільний для них вхідний сигнал через  $U(t)$ . Сигнал різниці виходів об'єкта і моделі:

$$\varepsilon(t) = Y_0(p) - Y_M(p), \quad (9.56)$$

Вважаємо, що оператор моделі  $W_M(p)$  співпадає з оператором об'єкта  $W_0(p)$  з точністю до параметрів. Градієнтний алгоритм оптимізації вектора  $\beta_M$  параметрів  $\beta_{Mi}$  моделі:



$$\frac{d\hat{\beta}_{M_i}(t)}{dt} = -\lambda_i \text{grad}_i \frac{\overline{\varepsilon^2}}{2}(\beta_0, \beta_M) = -\lambda_i e \frac{\overline{\partial \varepsilon}}{\partial \beta_{M_i}}, i = \overline{1, n}. \quad (9.57)$$

де рiською позначено операцію поточного усереднення.

Для побудови градієнтного алгоритму необхідно визначити  $\partial \varepsilon / \partial \beta_{M_i}$  та виконати операцію усереднення. Похідна від помилки:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_{M_i}} = \frac{\partial W_M(p)}{\partial \beta_{M_i}} U(t) \quad (9.58)$$

називається функцією чутливості, а  $\partial W_M / \partial \beta_{M_i}$  - допоміжним оператором [Костюк ]. Враховуючи вираз для функції чутливості, градієнтний алгоритм самонастройки моделі приймає вигляд :

$$\frac{d\beta_{M_i}}{dt} = -\lambda_i \varepsilon(t) \int_0^t \frac{\partial w(\tau)}{\partial \beta_{M_i}} u(t-\tau) d\tau, \quad (9.59)$$

де  $w(\tau)$  – імпульсна вагова функція моделі. Необхідно додатково будувати допоміжні оператори  $\partial W(p) / \partial \beta_{M_i}$  на основі яких вираховують функцію чутливості  $\partial \varepsilon / \partial \beta_{M_i}$ .

Розглянемо градієнтний алгоритм самонастройки з паралельною ортогональною моделлю у вигляді фільтра Лагерра (рис.9.18), де О - об'єкт, що підлягає ідентифікації,  $a_i$  – параметри, що настраюються,  $y_i$  – вихідні сигнали фільтрів Лаггера.

$$L\{l_0(t)\} = \frac{1}{p+1/2}, \quad L\{l_1(t)\} = \frac{p-1/2}{(p+1/2)^2} = L\{l_0(t)\} \cdot \frac{p-1/2}{p+1/2},$$

$$L\{l_2(t)\} = \frac{(p-1/2)^2}{(p+1/2)^3} = L\{l_1(t)\} \cdot \frac{p-1/2}{p+1/2} \quad (9.60)$$

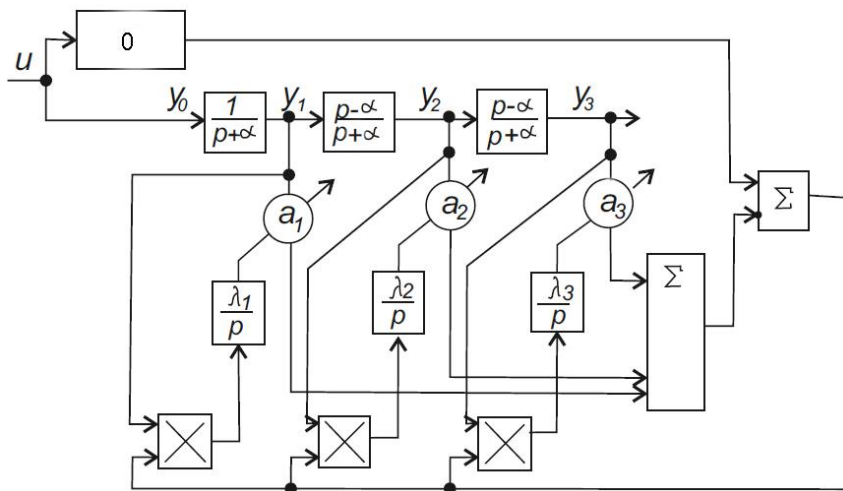


Рис. 9.18. Градієнтний метод оцінювання параметрів з ортогональною паралельною моделлю.

$a_i$  – параметри, які налаштовуються;  $y_i$  ( $i=1,2,3\dots$ ) – виходи окремих ланок фільтра Лагерра,  $U(t)$  – «білий шум»,

Наведена на рис.9.18. структурна схема неперервного градієнтного алгоритму настройки параметрів реалізує алгоритм:

$$\frac{da_i}{dt} = -\lambda_i \overline{\text{grad}_i \varepsilon^2} = -\lambda_i \overline{\varepsilon(t) y_i(t)}, \quad i=1,2,3., \quad (9.61)$$

Застосування паралельної моделі для оцінювання призводить до необхідності побудови додаткових допоміжних операторів або формуючих «білий шум» фільтрів, що ускладнює на практиці структурну реалізацію метода. Метод з послідовно-паралельною моделлю частково позбавлений вказаних вище недоліків.

### 9.2.3. Градієнтний метод з послідовно-паралельною моделлю

Розглянемо алгоритм настройки послідовно-паралельної моделі. Оператори моделей  $M_1$  і  $M_2$  будуються разом з низкочастотним фільтром  $F$ , що дозволяє здійснити перешкодостійку реалізацію похідних (рис.9.19).

Особливістю побудови такої моделі є те, що функції чутливості беруться безпосередньо із відповідних точок моделі. Звідси, для

реалізації алгоритму ідентифікації об'єкта моделлю (9.52) із застосуванням послідовно-паралельної моделі відпадає необхідність у побудові спеціальних допоміжних операторів (9.58). Але, на відміну від ортогональних навіть при «білому шумі» на вході взаємозв'язок параметрів залишається.

Покажемо, як отримувати функції чутливості та як проявляється взаємозв'язок параметрів. Визначимо різницю  $\varepsilon(t)$  між виходом першої  $M_1$  і другої  $M_2$  моделі:

$$\varepsilon(t) = Y_{M_2}(t) - Y_{M_1}(t) = (W_0 W_{M_1} - W_{M_2})U(t), \quad (9.62)$$

де оператори моделей  $W_{M_1}(\delta) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i \delta^i}{F(p)}$ ,

$$W_{M_2}(\delta) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j p^j}{F(\delta)}.$$

З урахуванням лінійності по параметрам  $b_i, a_i$  моделей  $M_1$  і  $M_2$ , функції чутливості запишуться наступними виразами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial a_k} &= \frac{W_0 p^k}{F(p)} U(t), k = 0, 1, 2, \dots, n; \\ \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial b_k} &= \frac{p^k}{F(p)} U(t), r = 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Підставляючи  $\partial \varepsilon(t) / \partial a_k$  і  $\partial \varepsilon(t) / \partial b_r$  у вираз для помилки  $\varepsilon(t)$ , отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial a_k} - \sum_{r=0}^m b_r \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial b_r}, \quad (9.64)$$

З виразів видно, сигнал  $\varepsilon(t)$  різниці пропорційний функціям чутливості. На рисунку 9.19 подано формувач помилки і, для прикладу, показано два контури самонастройки.

Гradientний алгоритм настройки параметрів:

$$\frac{d\beta_i}{dt} = -\lambda_i \sum_j C_j z_j(t) z_i(t), \quad C_i(t_0) = C_i(0), \quad (9.65)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m+1$$

де  $C = \{b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$  – вектор налаштовуваних параметрів;  $C_i(0)$  – початкові значення параметрів моделі;  $z$  – вектор функцій чутливості;  $\lambda_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, m+n+1$ ) – коефіцієнти посилення  $i$ -го контура самоналаштування моделі (КСН). Позначимо

$$\dot{a}_{ij} = -\lambda_i z_i(t) z_j(t). \quad (9.66)$$

Тоді градієнтний алгоритм само налаштування може бути представленою матричному вигляді системою диференціальних рівнянь :

$$\dot{C} = AC, C(0) = C_0. \quad (9.67)$$

Оскільки це диференціальне рівняння лінійної автономної системи, то умова стійкості визначається коренями характеристичного рівняння.

$$\det(pE - A) = |pE - A| = \begin{vmatrix} p - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & \dots & p - a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (9.68)$$

де  $E$  – одинична матриця.

Розкриваючи визначник, отримуємо рівняння  $n$ -го порядку, з коефіцієнтами  $a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), які згідно (9.66) залежать від часу, являючи добуток  $\lambda_i$  на  $z_i(t)$  і  $z_j(t)$ . Ефект усереднення досягається інерційністю процесу (9.65): чим менше  $\lambda$ , тим інерційніше процес.

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (9.69)$$

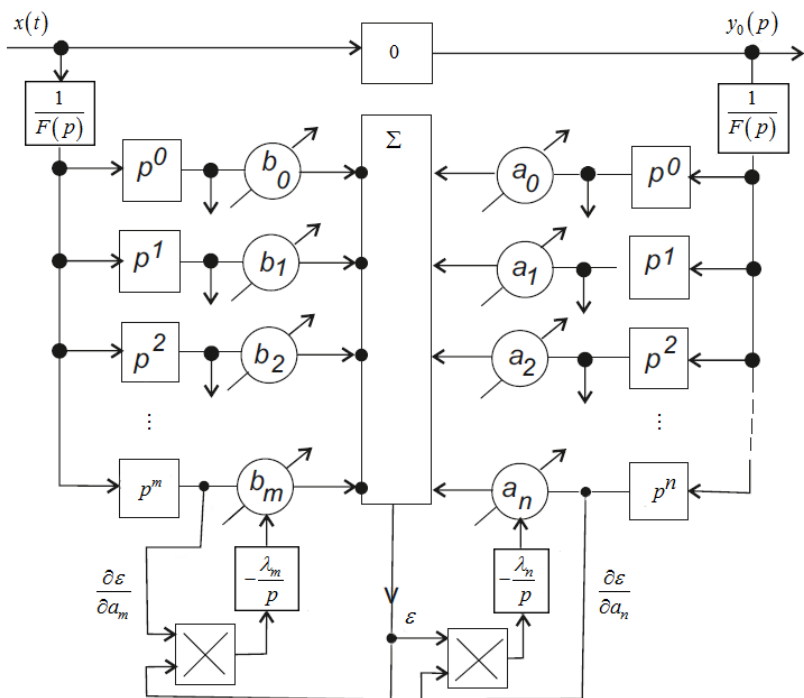


Рис.9.19. Схема практичної реалізації градієнтного методу налаштування параметрів з послідовно-паралельною моделлю.

Для стійкості процесу (9.67) самоналаштування необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини.

Недоліком градієнтних алгоритмів є залежність часу самонастройки від коефіцієнтів посилення  $\lambda_i$ , (рис.9.20). Для малого  $\lambda$  рух у точку екстремуму надто повільний. Збільшення  $\lambda$  призводить до росту коливань контуру самоналаштування і час настройки також зростає. Тому існує оптимальне  $\lambda^*$ . Окрім того зі збільшенням числа налаштовуваних параметрів збіжність процесу погіршується.

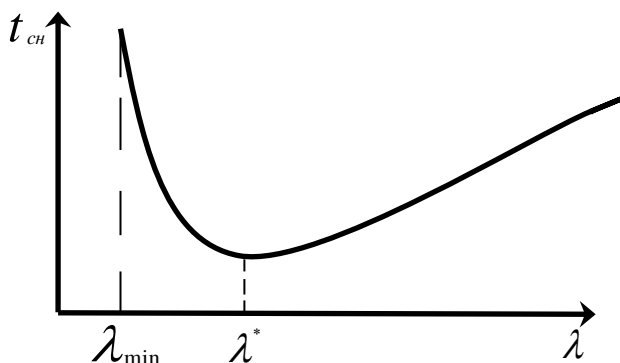


Рис.9.20. Залежність часу само настрійки від коефіцієнта посилення КСН.

Наступний метод значно позбавлений вказаних недоліків.

#### 9.2.4. Метод трьох моделей

Припускається, що для досліджуємого об'єкта відображення  $f^*(x^*, \beta^*, t)$  де вхід  $x(t)$ , вихід  $y(t)$ , може бути з малою похибкою представлено паралельною  $f(x, \hat{\beta}, t)$ , послідовно паралельною або композицією з паралельної і лінійної (по вектору параметрів  $\beta'''$ ) додаткової моделей:

$$y(t) = (\beta''')^T \Phi^T(x, \beta, t), \quad (9.69)$$

де

$$(\beta''')^T = [\beta''_1, \dots, \beta''_r]$$

$$\Phi^T(\cdot) = [\varphi_1(x, \beta, t), \dots, \varphi_r(x, \beta, t)]$$

Вважається, що сигнал  $x(t)$  вимірюється досить точно. Сигнал на виході складається з точного значення  $y^*(t)$  випадкової складової поміхи  $\tilde{\varepsilon}(t)$  і складової  $\varepsilon^*(t)$  - помилки, пов'язаної з неточністю структури моделі.

$$y(t) = y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t) + \varepsilon^*(t), \quad (9.70)$$

Апріорна інформація про  $\hat{\beta}^*$  відсутня, тому функціонал  $J(\varepsilon)$  у загальному випадку є багато екстремальною функцією відхилень  $\Delta\beta$ . Необхідно отримати незміщену оцінку  $\hat{\beta}$  коефіцієнтів моделі :

$$\hat{y}(t) = f\left(x^*(t), \hat{\beta}, t\right), \quad (9.71)$$

для якої

$$\hat{\beta} \in G_{\beta}, \left\| y^*(t) - \hat{y}(t) \right\|^2 \leq \delta J(\delta\beta), \quad (9.72)$$

де  $\delta J(\delta\beta)$  - допустима похибка  $\delta J$ , що відповідає області невизначенності  $\delta\beta$  оцінки  $\hat{\beta}$ .

Виміри проводять у дискретні моменти часу  $t_k = k\Delta t$  ( або просто  $k$ ), значення  $x^*(k)$  точне,  $y(k) = y^*(k) + \tilde{\varepsilon}(k) + \varepsilon^*(k)$ , початкові умови нульові. Алгоритм оцінювання  $\hat{\beta}$  у для моделі (9.71) полягає у наступному.

*Крок 1.* Задамо у виразу (9.71) :

$$f(x, \beta, t) = x, \quad (9.73)$$

що відповідає одиничній паралельній моделі. Апроксимуємо вихідний сигнал об'єкта  $y(k)$ ,  $k = \overline{1, M}$  вихідним сигналом моделі (9.69), додаткової до одиничної моделі (9.71).

У якості міри близькості  $y(k)$  і  $\hat{y}_1(k)$  приймемо, наприклад, середній по  $M$  дискретам квадрат похибки

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}_1(k), \quad (9.74)$$

де на цьому кроці

$$\hat{y}_1(k) = \left( \beta^m \right)^T \varphi(x). \quad (9.75)$$

З умови мінімуму  $\sum_{k=1}^M \varepsilon^2(k)$  отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$A_1 \beta''' = B_1, \quad (9.76)$$

де

$$A_I = \Phi^T \Phi \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r(1) & \varphi_r(2) & \dots & \varphi_r(M) \end{bmatrix}, \quad (9.77)$$

$$(\beta''')^T = [\beta_1''', \dots, \beta_r'''];$$

$$B_l = \varphi^T y, y^T = (y(1), \dots, y(M)).$$

де  $\varphi_i(k)$  – скорочене позначення для  $\varphi_i(x(k))$ .

З системи (9.76) знайдемо оцінку вектора  $\beta''$ :

$$\beta''' = A_1^{-1} B_1. \quad (9.78)$$

Підставивши (9.78) в (9.75), отримаємо оцінку  $\hat{y}_1(k)$  першого наближення.

*Крок 2.* Розглядаючи оцінку  $\hat{y}_1(k)$  як згладжений сигнал  $y(k)$  об'єкта, поставимо відображенню (9.75) у відповідність паралельну модель з вектором  $\beta$ , параметри якого одержимо через вектори  $\beta'$ ,  $\beta''$  послідовно-паралельної моделі. Для цього з умови мінімуму середнього квадрата  $\sum_{k=1}^M \varepsilon_0^2(k)$  узагальненої помилки  $\varepsilon_0$  послідовно-паралельної моделі,

$$\varepsilon_0 = f_1^T(x, \hat{y}, \beta' - f_2^T(x, \hat{y}_1, t))\beta'', \quad (9.79)$$

отримаємо систему нормальних рівнянь

$$A_\gamma \hat{\beta}^T = B_\gamma, \quad (9.80)$$



де  $\hat{\beta}^T = (\beta'^T, \beta''^T)$ ,

$$A_2 = F^T F; F^T = \begin{bmatrix} F_1(1) & F_1(2) & \dots & F_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_p(1) & F_p(2) & \dots & F_p(M) \end{bmatrix}, p = n + m;$$

$$F_i(k) = \begin{cases} f_{li}, i = \overline{1-m}, \\ f_{2,i-m}, i = m+1, n+m \end{cases}.$$

Із виразу (9.80) визначимо оцінку  $\hat{\beta}$  :

$$\hat{\beta} = A_2^{-1} B_2, \quad (9.81)$$

і підставимо її в модель (9.71). В результаті отримаємо оцінку  $\hat{y}_2$  сигналу  $y$  в другому наближенні і оцінку  $\hat{\beta}$  параметрів паралельної моделі в першому приближенні.

*Крок 3.* Повтор кроку 1, де в якості входу для моделі (9.75) береться вихід  $\hat{y}_2(k)$  паралельної моделі, отриманої на кроці 2. На виході моделі отримаємо більш точну оцінку  $\hat{y}_3$  сигналу  $y$ .

*Крок 4.* Повтор кроку 2, але уже для більш точної апроксимації  $\hat{y}_3$ . Далі кроки повторюються до виконання умови останови, якою може бути величина  $\delta$  відносно зміни модуля норми вектора  $\hat{\beta}$  на  $(l+1)$ -му і  $l$ -му кроках:

$$\delta = \left| \frac{\|\hat{\beta}(l+1)\|}{\|\hat{\beta}(l)\|} - 1 \right|. \quad (9.82)$$

Так як для оцінювання  $\beta'''$  і  $\hat{\beta}$  використовувались тільки квадратичні функціонали ( в силу того, що  $\beta'''$  і  $\hat{\beta}^T = [\beta'^T, \beta''^T]$  входять лінійно в  $\varepsilon$  і  $\varepsilon_0$  відповідно), то величина  $\delta$  зменшується по мірі росту  $l$ . Якщо структура моделі достатня для опису відображення в об'єкті  $x^*$  в  $y^*$  об'єкті, то з ростом  $l$  додаткова модель вироджується в одиничну, а паралельна – з одиничної в модель об'єкта. Швидкість сходження оцінок  $\hat{\beta}$  до  $\beta^*$  залежить від

того, наскільки точно додаткова модель апроксимує сигнал  $y$  (особливо на кроці 1, коли входом для неї служить сигналом  $x$ ). Для покращення апроксимаційних властивостей додаткову модель можна будувати по нонусному принципу (Розділ 9.2.4) з адаптацією структури операторів; зручні також ортогональні моделі.

На рис.9.21 представлено схему ідентифікації за методом трьох моделей. Система має три типи моделей і два блока  $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$  і  $\beta(f, \varepsilon_0)$  оцінювання параметрів.

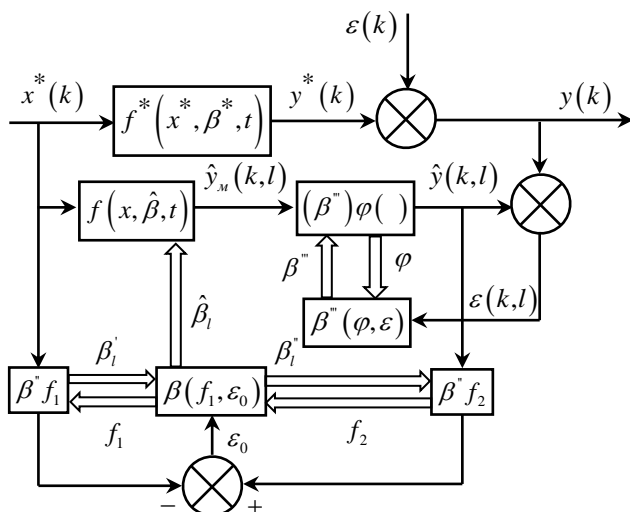


Рис.9.21 . Схема системи ідентифікації по методу трьох моделей.

Окрім циклічного алгоритму уточнення параметрів можливим є рекурентний. При рекурентному алгоритмі блоки  $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$  і  $\beta(f, \varepsilon_0)$  реалізують градієнтне строюку параметрів, при чому з умов стійкості алгоритм блоку  $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$  повинен бути більш швидкодіючим. В надзвичайно простому випадку оператором  $(\beta''')^T \varphi(t)$  допоміжної моделі є скаляр  $\beta'''$ , що настроюється за градієнтним алгоритмом:

$$d\beta'''/dt = -\lambda \text{grad}(\varepsilon t) = -\lambda 2\varepsilon(t) \hat{y}_1(t), \quad (9.83)$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + \hat{y}_1(t) \Delta \beta''',$$

або

$$d\Delta\beta'''/dt = -2\lambda[\hat{\varepsilon}(t)y_1(t) + \Delta\beta''' \hat{y}_1^2(t)].$$

Така допоміжна модель представляє собою стохастичну систему з параметрично-зворотнім зв'язком

$$d\Delta\beta'''/dt + 2\lambda\hat{y}_1^2(t)\Delta\beta''' = -2\lambda\tilde{\varepsilon}(t)\hat{y}_1(t), \quad (9.84)$$

для якої за відповідної нестационарності  $\hat{\beta}(t)$  і перешкоди  $\tilde{\varepsilon}(t)$  існує оптимальне значення  $\lambda$ , коли середній квадрат  $\bar{\varepsilon}^2$  помилки (9.74) є мінімальним і близьким до  $\tilde{\varepsilon}^2$ , тобто до квадрата поміхи.

Додаткова модель безперервно доповнює вихід  $\hat{y}(k)$  паралельної моделі до істинного виходу  $y^*(k)$  об'єкта. Тоді на послідовно-паралельній моделі по сигналах  $x(k)$  і  $\hat{y}(k) = y^*(k)$  буде одержано значення вектора  $\hat{\beta}$ , близьке до істинного  $\beta^*$ . Найпростіша допоміжна модель може застосовуватися лиш для уточнення вектора  $\hat{\beta}$  в паралельній моделі. При ідентифікації стаціонарних систем для  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливою є рівність  $\hat{y}(k) = y(k)$ , тобто послідовно-паралельна модель виходить ніби підключеною до об'єкта і оцінка  $\hat{\beta}$  буде зміщеною. Якщо в міру настройки паралельної моделі значення  $\lambda$  зменшувати, то оцінка  $\hat{\beta}$  прямує до  $\beta^*$ . Метод дозволяє одержати асимптотично не зміщені оцінки  $\beta$  невідомого вектора  $\beta^*$ , який нелінійно входить в оператор  $f(x, \beta, t)$  паралельної моделі.

**Приклад 9.2.** Об'єкт з чистим запізненням представлено моделлю.

$$y^*(t) = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot p^i\right)} \cdot x(t), \quad x(t) = x_0 \sin \omega t \quad (p = d/dt, \alpha_i = \tau^i / i!). \quad (9.85)$$

Необхідно по  $y(t) = y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t)$ ,  $\tilde{\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_m \delta(t - t_j)$ , де  $\delta(\cdot)$  - функція Дірака,  $t_j$  - випадкові значення із середнім періодом  $T_{cp}$  (тобто

$M(t_j - t_{j-1}) = T_{cp}$ ) і  $x(t)$  оцінити нелінійно вхідний в рівнянні об'єкта параметр  $\tau$ , користуючись не трьома, а двома моделями.

Так як об'єкт – це ланка з чистим запізненням  $\tau$ , то для синусоїдного сигналу  $x(t)$  область унімодальності середнього квадрата помилки  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}_1(t)$ , як функції  $\Delta\tau$ , буде обмежена величиною  $\pm \max \Delta\tau = \pm \pi/\omega$ ,  $\Delta\tau = \hat{\tau} - \tau$ . Якщо скористатися методом двох моделей, тобто, безпосередньо до об'єкта застосувати послідовно-паралельну модель з послідовним  $f_1 = W_1(p)$  і паралельним  $f_2 = W_2(p)$  операторами відповідно:

$$W_1(p) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i p^i}{1 + T_p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{1 + T_p},$$

то

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) &= W_2(p)[y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t)] - \\ -W_1(p)x(t) &\approx \Delta\tau \frac{p}{T_p + 1} x(t + \Delta\tau) + \tilde{\tau}(t + \hat{\tau}) / T_p + 1. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Тоді математичне очікування  $M\{\cdot\}$  оцінки  $\hat{\tau}$ , яке відповідає умові

$$M \frac{\delta \bar{\varepsilon}_0^2}{\delta \hat{\tau}} = M \left\{ \varepsilon_0(t) \frac{\partial \varepsilon_0(t)}{\partial \hat{\tau}} \right\} = \Delta\tau \frac{\omega^2}{T^2 \omega^2 + 1} \frac{x_0^2}{2} - \frac{a_{ш}^2}{2T^2 T_{cp}} = 0, \quad (9.88)$$

буде зміщено на величину для  $\omega T > 1$ , яка дорівнює відношенню перешкода-сигнал:

$$\Delta\tau = \frac{a_{ш}^2}{T_{cp} x_0^2} \frac{T \omega^2 + 1}{T^2 \omega^2} \approx \frac{a_{ш}^2}{T_{cp}} / x_0^2 \Delta\tau, \quad (9.89)$$

де  $T$ -стала часу фільтра.

Якщо  $|\Delta\tau| > \pi/\omega$ , то оцінка  $\hat{\tau}$  по паралельній моделі з початковим значенням  $\hat{\tau}(0)$ , яке взяте з послідовно-паралельної, не зійдеться до  $\tau$ , а приведе до одного з хибних значень  $\tau \pm \frac{2\pi}{\omega} k$ ,

$k=1,2,\dots$ , тобто, як бачимо застосування методу двох моделей не дало бажаного результату.

**Приклад 9.3.** По вхідному сигналу  $u(t)$  об'єкта, який представляє собою одиничну ступеньку, і вихідному сигналу  $x(t)$  потрібно визначити три коефіцієнта  $\hat{\beta}_i (i=\overline{1,3})$  диференціального рівняння моделі об'єкта, наприклад, моделі повздовжнього короткоперіодичного руху літака:

$$\ddot{x}^*(t) + \hat{\beta}_2 \dot{x}^*(t) + \hat{\beta}_1 x^*(t) = \hat{\beta}_3 U(t), \quad (9.90)$$

де  $x(t)$  – відхилення кутової швидкості,  $U(t)$  – відхилення руля висоти.

Сигнали  $U(t)$  і  $x^*(t)$  виміряні в дискретні моменти часу  $k$  з кроком  $\Delta t=0,05$ с. Вимірювання  $x(k)$  ( $k=\overline{1,100}$  сигналу  $x^*(k)$ ) зашумлені адаптивною перешкодою  $N(k)$  типу гаусового білого шуму з нульовим середнім значенням. Задачу будемо вирішувати методом послідовно-паралельної моделі і методом трьох моделей. Фільтри послідовно-паралельної моделі задамо оператором  $W_\Phi(p)=1/(p^3+5p^2+6p+7)$ , який значною мірою згладжує перешкоду

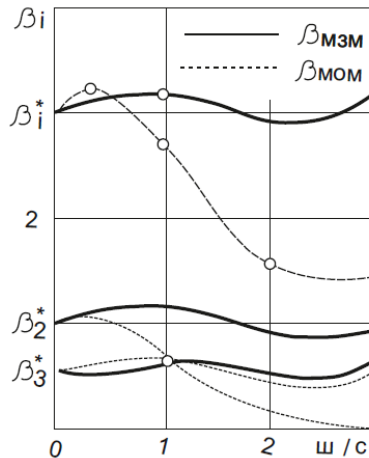


Рис.9.22. Залежність значень оцінок для методів узагальненої послідовно-паралельної моделі (ПІМ) і трьох моделей (МЗМ) з відношення шум-сигнал.

$N(t)$ . Однак, за великих рівнів шуму оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  суттєво занижені, оцінка  $\hat{\beta}_3$  для обох методів близька до істинної, так як сигнал  $u(t)$

вимірюється точно. Деяке відхилення її від точного значення викликане тільки не ортогональністю матриці МНК. На рис.9.22. і в табл.9.2. наведено залежності значень оцінок  $\hat{\beta}_i$  за методом послідовно-паралельної моделі (ППМ) (штрихові лінії) і по методу трьох моделей (МЗМ) (суцільні лінії) від відношення середньоквадратичних значень шуму  $N(k)$  і сигналу  $x^*(k)$  (ш/с). Як бачимо, в методі трьох моделей шум в  $y(t)$  не призводить до зміщення оцінок. Оцінки гарантовано сходяться за дві ітерації. Тоді як в методі ППМ оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  зі зростанням відношення м/с суттєво зменшуються, як показано в розділі 6, вираз (6.8)..

Таблиця 9.2.

**Залежності від відношення «шум-сигнал» значень оцінок  $\hat{\beta}_i$  для методу ППМ та МЗМ**

$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_3$	
п /с	П ПМ	МЗ М	П ПМ	МЗ М	П ПМ	МЗ М
0	3	3	1	1	0,5	0,5
0,1	3,06	3,05	1,03	1,02	0,504	0,504
0,2	3,11	3,08	1,04	1,03	0,508	0,507
0,5	3,15	3,10	1,01	1,1	0,517	0,516
1	2,69	3,15	0,71	1,14	0,6	0,52
2	1,56	2,82	0,16	0,96	0,49	0,48
3	1,39	3,22	0,02	0,95	0,53	0,58

### 9.2.5. Ноніусні моделі

Ноніусні моделі займають проміжне місце між ортогональними моделями та моделями з жорстко заданою структурою. Ноніусною динамічною моделлю реальної системи, називають динамічну систему, в якій сімейство функцій, яке відображає вхід  $u(t)$  і вихід  $y(t)$ , реалізується у вигляді композиції операторів

$W_{ki}(k=1,2;i=0,1,2,\dots)$  з адаптацією закону композиції і чергування в часі процесів оцінювання параметрів цих операторів. Розрізняють паралельні ( $k=1$ ), послідовне (інверсні) ( $k=2$ ), послідовно-паралельне ( $k=1,2$ ) підключення моделі до об'єкта, з послідовним, паралельним та змішаним законам композиції операторів.

**Приклад 9.4.** Розглянемо ноніусну модель з послідовним включенням операторів  $W_{li}$ , підключених паралельно до об'єкта  $\Sigma_\infty$ , який має невідомі нестационарні внутрішні та зовнішні характеристики, наприклад, літальний апарат. Необхідно в процесі функціонування об'єкта(в реальному часі) вести формування моделі відображення  $W(\beta, p)$  сигналу  $u(t)$  в  $y(t)$  для цілей прогнозування  $y(t)$  і відомого  $u(t)$  (задача прогнозування) або корекції  $u(t)$  за заданого  $y^*(t)$  (задача управління). Якщо оператор  $W(\beta, p)$  визначено, то для задачі прогнозування траєкторії ЛА

$$y(t) = W(\beta, p)u(t), \quad p = d/dt, \quad (9.91)$$

для задачі управління

$$u(t) = \hat{W}^{-1}(\beta, p)y^*(t), \quad (9.92)$$

де  $\hat{W}^{-1}(\beta, p)$  - фізичний реалізуємо оператор, близький до ідеального  $W^{-1}(\beta, p)$ . Так якщо

$$W(\beta, p) = \frac{\beta_1 p + \beta_0}{\beta^2 + \beta_2 p + \beta_3}, \quad (9.93)$$

то

$$W^{-1}(\beta, p) = \frac{1}{\delta p + 1} W^{-1}(\beta, p), \quad (9.94)$$

де  $\delta$  - малий параметр такий, що для будь-якої частоти  $\omega$  в смузі пропускання об'єкта  $\omega^2 \delta^2 < 1$ .

Тоді

$$U(t) = \frac{1}{\delta p + 1} W^{-1}(\beta, p)y^*(t), \quad (9.95)$$

а різниця

$$\varepsilon(t) = \hat{y}^*(t) - y^*(t) = \frac{1}{\delta p + 1} y^*(t) - y^*(t) = -\frac{\delta p}{\delta p + 1}(t), \quad (9.96)$$

між дійсним значенням  $\hat{y}^*(t)$ , отриманим на вході моделі і бажаним  $\hat{y}^*(t)$ , буде несуттєвою.

Для паралельної ноніусної моделі з послідовно ввімкненими операторами :

$$W(\beta, p) = \prod_{i=0}^r W_i(\beta_i, p). \quad (9.97)$$

Якщо є інформація про інерційність, коливання або нейтральність, то оператор  $W_0(\beta_0, p)$  задається відповідно в вигляді

$$W_0(\beta_0, p) = \frac{\beta_{01}}{p + \beta_{02}}; \quad W_0(p, \beta_0) = \frac{\beta_{01}}{p^2 + \beta_{02}p + \beta_{03}}; \quad W_0 = \frac{\beta_0}{p}. \quad (9.98)$$

Наступні оператори по можливості беруть до уваги фізику процесу або задаються у вигляді :

$$W_i(p, \beta_i) = (\beta_{0i} + \beta_{1i}p) / (\beta_{2i} + p), \quad (9.99)$$

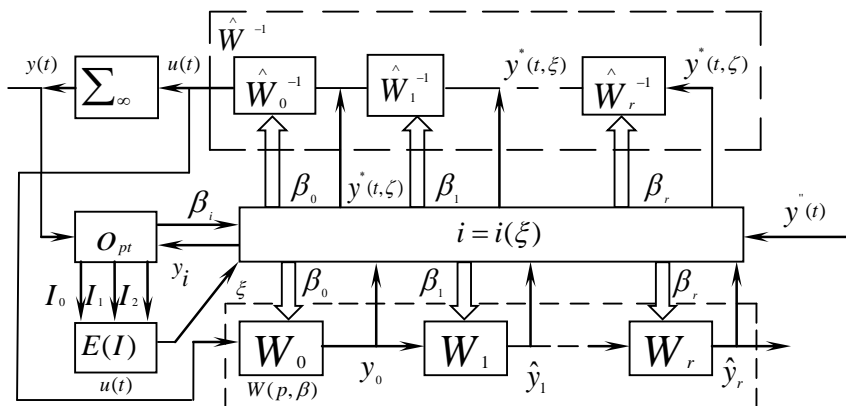


Рис.9.23 Схема ноніусного ідентифікатора в адаптивній системі управління

Кожен оператор містить два-три невідомі параметри. З ростом  $i$  при ідентифікації стаціонарного об'єкта, оператори  $W_i(p, \beta_i)$  прямують до одиничного оператора  $W(p, \beta_i) \equiv I$ . Настроюють оператори послідовно в часі. Спочатку настраюють вектор  $\beta_0$  оператора  $W_0(p, \beta_0)$ , потім  $W_1(p, \beta_1)$  і так до  $W_r(p, \beta_r)$ , якщо об'єкт за



цей час залишався стаціонарним. Якщо характеристики об'єкта суттєво змінюються за час налаштування  $r$  операторів, то (в залежності від степеня не стаціонарності) встигає налаштуватися більше або менше число операторів  $W_i$ . Адаптивна система управління з ідентифікатором у вигляді паралельної ноніусної моделі (9.97) (рис.9.23) має набір налаштованих по  $\beta$  операторів  $W_i(p, \beta_i)$ , інверсних їм фізично реалізуємо операторів  $\hat{W}^{-1}(p, \beta_i, \delta)$ , комутатора  $i(\xi)$ , блоку Опт формування оцінок  $\beta_i$  по критерію  $J$ , логічного блоку  $\xi(J)$  і реальної системи  $\Sigma_\infty$ . В момент початку роботи системи оператори  $W_i$  і  $\hat{W}^{-1}$  дорівнюють одиниці, а  $W_0$  рівний одному з операторів (9.98). По команді  $\xi$  з логічного блоку  $\xi(J)$  комутаторам  $i(\xi)$  комутуються схеми формування помилки з індексом «0»:

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t), \quad (9.100)$$

і закону настройки  $\beta_0$  блоком Опт. Блок  $\xi(J)$  контролює значення критерію  $J_0$  і його зміни в часі. В якості  $J_i(i, 0, r)$  можуть братися згладжені фільтром  $W_\Phi(p)$  квадрати  $\varepsilon_i^2(t)$ :

$$J_i = W_{-\Phi}(p) \varepsilon_i^2(t), \quad (9.101)$$

де  $W_\Phi(p) = 1/(Tp + 1)$ ;  $p = d/dt$ ;  $T$  - стала часу фільтра.

Сигналом закінчення настройки  $i$ -го оператора і переходу до  $(i+1)$  може бути величина:

$$dJ_i / dt = pJ_i(t) / (Tp + 1), \quad (9.102)$$

яка уявляє собою згладжене фільтром  $1/(Tp + 1)$  значення похідної по часу від критерію  $J_i$ :

якщо

$$\left| \frac{dJ_i}{dt} \right| < \Delta_1, \quad (9.103)$$

(де  $\Delta_1$  - заданий поріг), то настройка оператора  $W_0$  припиняється і за командою  $\xi$  блоку  $\xi(J)$  комутатор  $i(\xi)$  комутує коло налаштування оператора  $W_1(p, \beta_1)$ , і так далі. Блок  $\xi(J)$  в процесі налаштування операторів контролює також зміну  $\Delta J_j$  показника  $J_j$ ,  $0 \leq j \leq i$ :

$$\Delta J_j = J_j(t) - J_j(t_j), \quad (9.104)$$

де  $J_j(t_j)$  – значення  $J_j$  на момент  $t_j$  закінчення налаштування  $j$ -го оператора ( $t_j < t$ ). Поява  $\Delta J_j$  пов'язана з не стаціонарністю характеристик об'єкта.

Якщо  $\Delta J_j > \Delta_2$ , то налаштування  $i$ -го оператора  $W_i(\beta_i, p)$  припиняється і відновлюється підлаштування  $j$ -го оператора до виконання умови (9.103), потім  $(j+1)$ -го і так далі (до  $i$ -го). В задачі прогнозування достатньо спостерігати  $\hat{y}_i(t)$ . Для задачі управління оптимальна траєкторія  $u(t)$  отримується на виході інверсної, фізично реалізованої моделі  $W^{*-1}$ . Сигнал  $y^*(t)$  при цьому подається за допомогою комутатора  $i(\xi)$  на вхід  $i$ -го, а при умові (9.103) – на вхід  $j$ -го інверсного оператора.

Зіставлення ноніусних та ортогональних моделей показує, що врахування фізичної природи об'єкта дозволяє суттєво зменшити число ноніусних операторів в порівнянні з числом ортогональних операторів. Ноніусні моделі можуть бути ефективні для опису коливальних та нестаціонарних об'єктів, які знаходяться в нестаціонарних умовах.

### 9.3. Комплексування методів і моделей.

Стійкість динамічних систем є однією з найбільш важливих характеристик, особливо, якщо вони нестаціонарні, не повністю відомі і схильні до випадкових перешкод у вимірювальних каналах змінних стану. До таких систем відноситься літак, зокрема його стійкість у поздовжньому короткоперіодичному русі. Для малих відхилень змінних від режиму балансування (постійна висота, швидкість руху у вертикальній площині) цей рух описується щодо змінних (кута атаки, кутової швидкості і руля висоти) системою рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u, \\ \dot{x}_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u \end{cases}, \quad (9.105)$$

де  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  – похідні за часом від  $x_1$  і  $x_2$ ;  $\beta_{ij}, (i=1,2; j=1,2,3)$  – аеродинамічні коефіцієнти. Системі (9.105) еквівалентні

передаточні функції, що відображають вхідний сигнал  $u$  у виходи  $x_{1M}$  або  $x_{2M}$ , наприклад  $u$  в  $x_{2M}$ :

$$W_u^{x_2}(p) = \frac{\beta_{23}p - (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})}{p^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})p + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})}. \quad (9.106)$$

Коефіцієнти  $(\beta_{11} + \beta_{22}) = -a_1$  і  $(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) = a_0$  знаменника визначають відповідно коливальний і аперіодичний запас стійкості. Помноживши ці коефіцієнти на  $\frac{J_{z_1}}{qSb_a\beta_{11}}$ , (де  $J_{z_1}$  - момент інерції,  $q$  - швидкісний напір,  $S$  - площа крила,  $b_a$  - середня аеродинамічна хорда крила), отримаємо відповідний запас стійкості в частках від  $b_a$ . Коефіцієнти  $\beta_{13}, \beta_{23}$  визначають ефективність керма висоти;  $\beta_{12}, \beta_{22}$  - демпфуючі сили і моменти. Оцінювання коефіцієнтів  $\beta_{ij}$  літальних апаратів (ЛА), за якими визначається стійкість і керованість ЛА, є актуальним завданням льотних випробувань (ЛВ).

Обмежений вартістю натурального експерименту і нестаціонарністю час експерименту, нелінійністю - діапазон зміни змінних, не дозволяють з досить високою точністю одержати оцінки  $\hat{\beta}_{ij}$  з зашумлених перешкодами вимірювань  $\hat{x}_i, \hat{u}$ . З цих причин практика ЛВ обмежується досить наближеними оцінками стійкості і керованості ЛА [1]. Підвищити точність оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) без збільшення часу ЛВ можна, скориставшись методом статистичного моделювання перешкод. Для цього, з огляду на апіорну інформацію про рознесені спектри сигналів і перешкод (перешкоди більш високочастотні), достатньо для кожного сигналу виконати фільтрацію перешкод і, як різницю відфільтрованого і вихідного сигналу,

отримати наближену реалізацію перешкоди. Далі визначити статистичні характеристики цих реалізацій і згенерувати  $m$  статистично подібних реалізацій перешкод для кожної змінної  $x_i, u$ . Склавши ці реалізації з відповідними відфільтрованими сигналами, отримаємо  $m$  псевдовиборок даних ЛВ. Маючи в наявності  $m$  статистично ідентичних вибірок,  $p$  методів ідентифікації і  $q$  моделей ЛА, можна скористатися їх надмірністю з метою отримання більш точних оцінок АДК.

Стосовно до задачі визначення АДК ЛА в поздовжньому коротко-періодичному русі розглянемо три моделі (9.105), (9.106) і модель (9.107), що впливає з двох перших:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= (\beta_{11} + \beta_{22}) \dot{x}_2 - (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) x_2 + \beta_{23} \dot{u} - \\ & - (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22}) u = -a_1 \dot{x}_2 - a_0 x_2 + a_2 \dot{u} + a_3 u. \end{aligned} \quad (9.107)$$

Число  $p$  методів визначення АДК визначається кількістю функціоналів близькості в просторі  $L_2$  [2] змінних ЛА і його моделей (9.108), (9.109), (9.110). З умови мінімуму цих функціоналів визначаються оптимальні оцінки  $\beta$  АДК:

$$\{\beta_{ij}^*\} = \arg \min_{\beta_{ij}} \left\| \hat{x}_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \hat{x}_j - \beta_{i3} \hat{U} \right\|^2, \quad (9.108)$$

де  $i=1,2$ ;  $j=1,2$ ;  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{x}_j$ ,  $\hat{U}$  – згладжені фільтром змінні.

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \|x_2 - x_{2M}\|^2, \quad (9.109)$$

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \left\| \hat{x}_2 + a_1 \hat{x}_2 + a_0 \hat{x}_2 - a_2 \hat{U} - a_3 \hat{U} \right\|^2. \quad (9.110)$$

Згладжування всіх змінних здійснюється одним і тим же фільтром, щоб не внести методичну помилку в лінійні рівняння ЛА.

Далі, для кожного з алгоритмів (9.108) (9.109), (9.110) на множині із  $m$  реалізацій, для кожної реалізації визначаються оптимальні значення  $\{\beta_{ij}^*\}$ ,  $\{a_i^*\}$ , їх середні значення за  $m$  реалізаціям  $\{\bar{\beta}_{ij}^*\}$ ,  $\{\bar{a}_i^*\}$ , оцінки власних  $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)}^2$ , і взаємних  $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)a_i^*(l)}^2$  дисперсій, де  $k=1,2,3$ ;  $p=3$ ;  $l=1,2,3$ ;  $k \neq l$ . Для стислості запису елементи множин  $\{\beta_{ij}^*\}$ ,  $\{a_i^*\}$ , позначимо через  $\{\alpha_i^*\}$ . Тоді будемо шукати найкращу на множині з трьох методів - моделей оцінку  $\alpha_i^*$  у вигляді:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^3 C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^3 C_k = 1. \quad (9.111)$$

Коефіцієнти  $C_k$  визначимо з умови:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha_i^*}^2}{\partial C_k} = 0, \quad k=2,3; \quad (9.112)$$

де

$$\hat{\sigma}_{\alpha_i^*}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^3 C_k (\alpha_i(k, j) - \bar{\alpha}_i(k, j)) \right)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^3 C_k^2 \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 C_k C_l \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = C^T A C.$$

Для стислості позначимо  $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 = \hat{\sigma}_k^2$ ,  $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = \hat{\sigma}_{kl}^2$ , тоді  $C^T = [C_2, C_3]$ ,

$$A = \begin{bmatrix} (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2) & (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2) \\ (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2) & (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_3^2 - 2\hat{\sigma}_{13}^2) \end{bmatrix}.$$

Тепер умова  $AC = B$  (9.112) еквівалентна системі (9.113):

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \\ \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \quad (9.113)$$

Рішення  $C = A^{-1}B$  системи (9.113) існує, якщо матриця  $A$  позитивно визначена. Чим менше корельовані похибки в оцінюванні  $\alpha_i$  різними методами, тим ближче матриця  $A$  до діагональної. Так як норми близькості (9.108), (9.109), (9.110) взяті в просторі змінних  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ , то можна чекати слабку кореляцію в похибок оцінок  $\alpha_i$  різними методами - моделями (9.108), (9.109), (9.110). Підставивши знайдені з системи (9.113) оптимальні значення  $C_2$ ,  $C_3$ , а також  $C_1 = 1 - C_2 - C_3$ , в рівняння (9.111), отримаємо оптимально зважену оцінку  $\alpha_i^*$  коефіцієнта  $\alpha_i$  (за умови гарної обумовленості матриці  $A$  і невеликої похибки оцінок  $\hat{\sigma}_i^2$ ,  $\hat{\sigma}_{ij}^2$ , дисперсій  $\sigma_i^2$ ,  $\sigma_{ij}^2$ ).

В іншому випадку для гарантії не погіршення результату для зважування оцінок  $\alpha_i$  слід скористатися мінімаксних підходом. Оцінки  $\hat{\sigma}_i^2$ ,  $\hat{\sigma}_{ij}^2$ , обчислені за  $m$  згенерованими вибірками даних, мають похибки с  $\chi^2$  - розподілом, якщо похибки оцінок  $\alpha_i(k)$  розподілені за нормальним законом. Істинні значення  $\sigma_i^2$ ,  $\sigma_{ij}^2$  для заданого рівня достовірності знаходяться в інтервалі  $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2$ ,  $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_{ij}^2$ , або приблизно  $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_i^2$ ,  $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_{ij}^2$ , де  $\gamma$  - квантиль  $\chi^2(p, m)$  розподілу,  $\gamma \ll 1$ . Нехай  $\sigma_i^2 = \hat{\sigma}_i^2(1 + \gamma)$ , для  $i \in I = \{1, n_1\}$ ,  $\sigma_j^2 = \hat{\sigma}_j^2(1 - \gamma)$ , для  $j \in J = \{n_1 + 1, n\}$ . Тоді  $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2(1 + \gamma)$ , для  $i, j \in I$ ;  $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2(1 - \gamma)$ ,

для  $i, j \in J$ ;  $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}$ , для  $i \in I, j \in J$  або  $i \in J, j \in I$ . Оцінка дисперсії зваженої оцінки  $\alpha_r^*$   $r$ -го АДК:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = & \sum_{i \in I} C_i^2 \hat{\sigma}_i^2 (1+\gamma) + \sum_{j \in J} C_j^2 \hat{\sigma}_j^2 (1-\gamma) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1+\gamma) + \\ & + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1-\gamma) + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)} + \sum_{\substack{i \in J \\ j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Вираз (9.114) береться  $L$  раз для всіх можливих комбінацій  $\hat{\sigma}_{ij}^2(1 \pm \gamma)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Для кожного  $j$ -го поєднання з умови (9.112) отримуємо систему, аналогічну (9.113), вирішуючи яку, знаходимо оптимальний  $\xi$ -й вектор  $C^*(\xi)$ :

$$C^*(\xi) = [C_1^*(\xi), C_2^*(\xi), C_3^*(\xi)]^T, \quad \xi = \overline{1, L} \quad (9.115)$$

і обчислюємо все  $\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$ ,  $\xi = \overline{1, L}$ ;  $S = \overline{1, L}$ .

Мінімаксна оцінка  $C^*$  визначається із умови

$$C^* = \arg \min_{\xi \in \{1, L\}} \max_{S \in \{1, L\}} \sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi)). \quad (9.116)$$

Тобто кожен вектор (9.115) підставляють в кожний варіант дисперсії (9.114) і за  $C^*$  приймається той, найбільше значення якого для всіх варіантів (9.114) мінімально серед найбільших значень інших векторів (9.115).

**Приклад 9.5.** Для наочності розглянемо двовимірний випадок ( $p=2$ ). Нехай  $\sigma_1^2=1$ ,  $\sigma_2^2=9$ ;  $\sigma_{12}^2=2,8$ ,  $\gamma=0,1$ . Можливі поєднання наведено в табл. 9.3:

Таблиця 9.3.

**Множники можливих відхилень оцінок дисперсій**

№ варіанта	Множники для		
	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_{12}^2$
1	$1+\gamma$	$1+\gamma$	$1+\gamma$
2	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$
3	$1+\gamma$	$1-\gamma$	$\sqrt{(1-\gamma^2)}$
4	$1-\gamma$	$1+\gamma$	$\sqrt{(1-\gamma^2)}$

Оцінка (9.111):

$$\alpha_i^* = C\alpha_i(1) + (1-C)\alpha_i(2). \quad (9.117)$$

Дисперсія (9.114):

$$\sigma_{\alpha_r}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2)C^2 + 2(\sigma_{12}^2 - \sigma_1^2)C + \sigma_2^2. \quad (9.118)$$

Підставивши замість дисперсій чотири варіанти їх оцінки з табл. 9.3. і виконавши операції (9.112), (9.113), отримаємо набір (9.115) для 4 варіантів (9.118):

$$C^*(1) = C^*(2) = \frac{\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2} = 1,41;$$

$$C^*(3) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1-\gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1+\gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1-\gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}} = 1,465;$$

$$C^*(4) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1+\gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1-\gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1+\gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}} = 1,361.$$

Значення  $\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$  зведено в табл. 9.4.



Таблиця 9.4

## Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$				
$S \backslash \xi$	1	2	3	4
1	0,290	0,290	0,304	0,300
2	0,236	0,236	0,249	0,245
3	0,327	0,327	0,316	0,354
4	0,232	0,232	0,275	0,218

У табл. 9.4 жирною рамкою виділено варіанти  $\max_{\alpha_r} \sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$ , подвійною рамкою - з

$\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2(3, C^*(3)) = 0,316$ , з її аргументом  $C^* = 1,465$ ,

$(1 - C^*) = -0,465$ . Якщо взяти  $\sigma_1^2 = 1$ ;  $\sigma_2^2 = 9$ ;  $\sigma_{12}^2 = 2,8$ ;  $\gamma = 0,1$ , то  $C^*(1) = C^*(2) = 0,756$ ;  $C^*(3) = 0,737$ ;  $C^*(4) = 0,737$ . Таблиця 9.5, подібна до табл. 9.4:

Таблиця 9.5

## Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$				
$S \backslash \xi$	1	2	3	4
1	0,081	0,081	0,089	0,087
2	0,067	0,067	0,073	0,071
3	0,082	0,082	0,078	0,099
4	0,076	0,076	0,094	0,070

Відповідно  $\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi)) = 0,082$ ,  $C^* = 0,756$ ,

$(1 - C^*) = 0,244$ . Якщо припустити, що  $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ , то для різних значень коефіцієнта кореляції  $r_{12} = \frac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}$  та співвідношення

$F_{12} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  одержимо сімейство графіків  $C^*(r_{12}, F)$  (рис.9.24).

Для,  $F_{12} = 1$ ,  $C^* = 0,5$  для будь-яких  $r_{12}$ ; при  $F_{12} \rightarrow \infty$ ,  $C^* \rightarrow 1$ ,  $(1 - C^*) \rightarrow 0$ , тобто неефективний метод виключається.

Характерно, що для однакових  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, |\sigma_{12}^2|$  величина  $\hat{\sigma}_{\alpha_r}^2$

залежить від знаку  $\sigma_{12}^2$  (0,316 для позитивної і 0,082 - для негативної). Тобто зважування двох методів з негативною  $\sigma_{12}^2$  дає кращий результат. У даному прикладі для  $\sigma_{12}^2 = 0$  дисперсія  $\hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = 0,9$ . Це набагато більше мінімаксних значень

дисперсій при  $\sigma_{12}^2 = \pm 2,8$  (0,316 і 0,082 відповідно). Тобто взаємна кореляція дозволяє підвищити точність мінімаксного оцінки.

Таким чином, використовуючи кілька моделей об'єкта ідентифікації і кілька методів їх параметричного оцінювання спільно з технологією статистичного моделювання перешкод, можна істотно підвищити точність оцінок параметрів АДК ЛА без збільшення довжини вибірки даних натурних випробувань. Тим більше, що з огляду на нестационарність об'єкта ідентифікації, вибірки не можуть бути як завгодно великими.

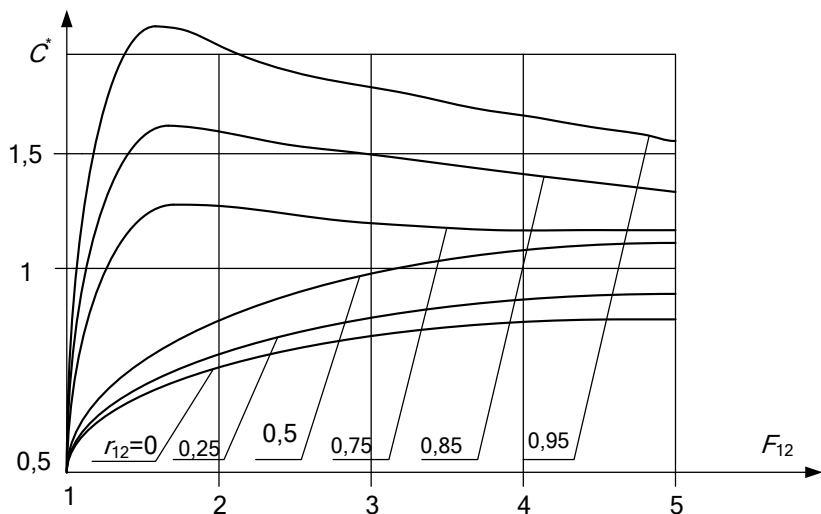


Рис. 9.24. Залежність оптимальної ваги  $C^*$  від ступеня кореляції і зашумленості оцінок

*Контрольні запитання:*

1. Визначити поняття алгоритмічних моделей.
2. Навести алгоритм градієнтного методу з паралельною моделлю.
3. Навести алгоритм градієнтного методу з послідовно-паралельною моделлю.
4. Навести алгоритм ідентифікації методу 3-х моделей.
5. Навести поняття конусних моделей.
6. Визначити поняття активної ідентифікації динамічних моделей.
7. Навести алгоритм визначення імпульсних перехідних функцій.
8. Навести визначення псевдовипадкової двійкової послідовності.
9. Навести властивості псевдовипадкових двійкових послідовностей.
10. Навести алгоритм отримання непараметричних оцінок.
11. Навести алгоритм отримання частотних характеристик.
12. Навести алгоритм отримання перехідних функцій об'єкта.

13. Навести алгоритм визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передаточні функції.

14. Навести зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передаточної функції з імпульсною перехідною функцією.

***Література до розділу :***

1) Сільвестров А.М., Чіпаєв П.І. Ідентифікація та оптимізація автоматичних систем. - М.: Енергоатоміздат, 1987-200с.

2) Кірічков В.М. Ідентифікація об'єктів систем управління технологічними процесами. К.: Вища школа, 1990, 263с.

3) Костюк В.І. Безпошукові градієнтні самоналаштовуючі системи. К.: Техніка, 1969.

4) Адаптивні системи ідентифікації. / Під ред. Костюка В.І., К.: Техніка, 1975, 200с.

5) Люнг Л. Ідентифікація систем. Теорія для користувачів. - М.: Наука. Гл. ред. фіз.-мат. літ., 1991-432с.

6) Мініна О.М. Визначення динамічних характеристик і параметрів типових регулюючих об'єктів. Вид-во АН СССР, М.: 1963.

7) Наладка засобів автоматизації та автоматичних систем регулювання // Під ред. А.С. Ключова, - М.: Енергоатоміздат, 1989, 367с.

## Розділ 10. Двоступенева ідентифікація аеродинамічних коефіцієнтів моделі поздовжнього руху літаків.

### 10.1. Математичні моделі поздовжнього руху літака.

Поздовжній рух літального апарата (ЛА) у швидкісній системі координат  $(X, Y, Z)$  [1] описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m \dot{v} = X, \\ m v \dot{\Theta} = Y, \\ J_{z_1} \dot{\omega} = M_z, \end{cases} \quad (10.1)$$

де  $m$  і  $J_{z_1}$  - постійні для даної ділянки траєкторії маса і момент інерції;

$v, \omega_z, \dot{v}, \dot{\omega}_z$  - лінійна і кутова швидкості та їх похідні за часом

$$\dot{\Theta} = \omega_z - \alpha;$$

$\alpha$  - кут атаки;  $X, Y, M_z$  - сили і момент:

$$\left. \begin{aligned} X &= P_x - Q - G \sin \Theta, \\ Y &= P_y + Y_{aэp} - G \cos \Theta, \\ M_z &= M_{z\partial\theta} + M_{zaэp}, \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

де  $Q, Y_{aэp}, M_{zaэp}$  - аеродинамічні сили опору, підйомна сила і момент;

$P_x, P_y, M_{z\delta}$  - складові тяги і моменту, що створюються двигунами;  
 $G$  - вага ЛА;  $\Theta$  - кут нахилу траєкторії.

Як основний, розглядається рух з постійною швидкістю  $v$ , висотою  $H$ , конфігурацією літака і тягою двигунів. Тоді для короткоперіодичних руху центру мас і навколо центру мас літака, що представляє реакцію на відхилення керуючого впливу  $\delta_\epsilon$  (кут відхилення рулів висоти або стабілізаторів) у пов'язаній з літаком системі координат  $(X_1, Y_1, Z_1)$ , приріст  $\Delta C_y$  і  $\Delta m_z$ , коефіцієнти  $C_y$  та  $m_z$  підйомної сили і моменту  $M_z = m_z q S$  можуть бути наближено представлені лінійною залежністю:

$$\Delta C_y = C_y^\alpha \Delta \alpha + C_y^{\dot{\alpha}} \dot{\Delta \alpha} + C_y^{\omega_z} \Delta \omega_z + C_y^{\delta_\epsilon} \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.3)$$

$$\Delta m_{z_1} = m_{z_1}^\alpha \Delta \alpha + m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \dot{\Delta \alpha} + m_{z_1}^{\omega_z} \Delta \omega_z + m_{z_1}^{\delta_\epsilon} \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.4)$$

де  $C_y^\alpha, C_y^{\dot{\alpha}}, C_y^{\omega_z}, C_y^{\delta_\epsilon}$  - часткові похідні від  $C_y$  по відповідним змінним  $\alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \delta_\epsilon$ , що взяті в точці, яка відповідає основному руху,  $m_z^\alpha, m_{z_1}^\alpha, m_{z_1}^{\omega_z}, m_{z_1}^{\delta_\epsilon}$  - аналогічні похідні від  $m_{z_1}$ ;

$q$  - швидкісний напір повітряного потоку;  $S$  - площа крила.  
 Запишемо кінематичне співвідношення

$$\dot{\Theta} = \frac{g}{v} n_y \cos \Theta, \quad (10.5)$$

(де  $g$  - прискорення сили тяжіння) у відхиленнях від основного руху, вважаючи  $v = \text{const}$ ,  $\tilde{n}os \Theta \cong 1$ :

$$\Delta \dot{\alpha} = \Delta \omega_{z_1} - \frac{g}{v} \Delta n_y. \quad (10.6)$$

Прирости коефіцієнтів  $\Delta C_y$  та  $\Delta m_z$ , пов'язані з вимірюваними в польоті вертикальним перевантаженням і швидкістю  $n_y$  і  $\omega_{z_1}$  співвідношенням:

$$\Delta C_y = \frac{G}{qS} \Delta n_y, \quad (10.7)$$

$$\Delta m_{z_1} = \frac{J_{z_1}}{qSb_A} \cdot \Delta \dot{\omega}_{z_1}, \quad (10.8)$$

Де  $b_A$  - середня аеродинамічна хорда крила (САХ).

### 10.1.1 Залежність $\Delta m_{z_1}$ від $\Delta n_y, \Delta \omega_{z_1}, \Delta \delta_\epsilon$ ..

Підставивши з рівняння (10.6) значення  $\Delta \dot{\alpha}$  в (10.3) і (10.4) отримаємо:

$$\Delta C_y = C_y^\alpha \Delta \alpha + \left( C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^\omega \right) \Delta \omega_{z_1} + C_y^\delta \Delta \delta_\epsilon - C_y^\alpha \frac{g}{v} \Delta n_y, \quad (10.9)$$

$$\Delta m_{z_1} = m_{z_1}^\alpha \Delta \alpha + \left( m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^\omega \right) \Delta \omega_{z_1} + m_{z_1}^\delta \Delta \delta_\epsilon - m_{z_1}^\alpha \frac{g}{v} \Delta n_y. \quad (10.10)$$

Враховуючи вираз (10.7) з (10.9) знайдемо  $\Delta \alpha$ :

$$\Delta \dot{\alpha} = \quad (10.11)$$

$$= (C_y^\alpha)^{-1} \left[ \left( \frac{G}{qS} + C_y^\alpha \frac{g}{v} \right) \Delta n_y - \left( C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^\omega \right) \Delta \omega_{z_1} - C_y^\delta \Delta \delta_a \right].$$

Підставивши (10.11) в (10.10) і враховуючи що  $(C_y^\alpha)^{-1} \cdot m_{z_1}^\alpha = m_{z_1}^{C_y}$ , отримаємо вираз, що пов'язує  $\Delta m_{z_1}$  з добре вимірюваними змінними  $\Delta n_y, \Delta \omega_{z_1}, \Delta \delta_a$ :

$$\begin{aligned} \Delta m_{z_1} = & \left[ m_{z_1}^{C_y} \left( \frac{G}{qS} + C_y^\alpha \frac{g}{v} \right) - m_{z_1}^\alpha \frac{g}{v} \right] \Delta n_y + \\ & + \left[ \left( m_{z_1}^\alpha + m_{z_1}^\omega \right) - m_{z_1}^{C_y} \left( C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^\omega \right) \right] \Delta \omega_{z_1} + \\ & + \left[ m_{z_1}^\delta - m_{z_1}^{C_y} \cdot C_y^\delta \right] \Delta \delta_a \end{aligned} \quad (10.12)$$

### 10.1.2. Залежність $\Delta m_{z_1}$ від $\Delta \alpha, \Delta \omega_{z_1}, \Delta \delta_a$ ..

З (10.6) і (10.7) отримаємо:

$$\Delta C_y = \tau \left( \Delta \omega_{z_1} - \Delta \dot{\alpha} \right), \quad (10.13)$$

де  $\tau = \frac{v}{g} \cdot \frac{G}{qS} = \frac{2m}{\rho S v}$  - масштаб часу;  $m$  - маса літака;  $\rho$  -

щільність повітря. Підставивши (10.13) і (10.3), знайдемо  $\Delta \dot{\alpha}$ :

$$\Delta \dot{\alpha} = \frac{\tau - C_y^\omega}{\tau + C_y^\alpha} \Delta \omega_{z_1} - \frac{C_y^\alpha}{\tau + C_y^\alpha} \Delta \alpha - \frac{C_y^\delta}{\tau + C_y^\alpha} \Delta \delta_a. \quad (10.14)$$



Підставивши значення (10.14) в (10.4), отримаємо шуканий вираз:

$$\Delta m_{z_1} = \left( m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right) \Delta \alpha + \left( m_{z_1}^{\omega} + m_{z_1}^{\alpha} \frac{\tau - C_y^{\omega}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right) \Delta \omega_{z_1} + \left( m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right) \Delta \delta_{\epsilon} \quad (10.15)$$

### 10.1.3. Залежність $\Delta m_{z_1}$ від $\Delta n_y, \Delta \alpha, \Delta \delta_{\epsilon}$ .

З (10.13) знайдемо

$$\Delta \omega_{z_1} = \tau^{-1} \Delta C_y + \Delta \alpha \quad (10.16)$$

З (10.3):

$$\Delta \alpha = (C_y^{\alpha})^{-1} \left[ \Delta C_y - C_y^{\omega} \Delta \omega_{z_1} + C_y^{\alpha} \Delta \alpha + C_y^{\delta} \Delta \delta_{\epsilon} \right] \quad (10.17)$$

Підставивши (10.7) в (10.16), а (10.17) в (10.4) і привівши подібні, отримаємо:

$$\Delta m_{z_1} = \left[ \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{C_y^{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega} \cdot \tau^{-1} \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{C_y^{\alpha}} C_y^{\omega} \cdot \tau^{-1} \right] \Delta C_y + \left[ \left( m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\omega} \right) - \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{C_y^{\alpha}} C_y^{\alpha} \right] \Delta \alpha + \left[ m_{z_1}^{\delta} - \frac{C_y^{\delta}}{C_y^{\alpha}} m_{z_1}^{\alpha} \right] \Delta \delta_{\epsilon}$$

або

$$\Delta m_{z_1} = \left[ \left( m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} \right) - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu} \right] \frac{G}{qS} \Delta n_y +$$

$$\left[ m_{z_1}^{\bar{\alpha}} + m_{z_1}^{\bar{\omega}} - m_{z_1}^{\omega} C_y^{\bar{\alpha}} \right] \Delta \alpha + \left[ m_{z_1}^{\delta} - C_y^{\delta} m_{z_1}^{C_y} \right] \Delta \delta_{\epsilon}, \quad (10.18)$$

$$\text{де } m_{z_1}^{\bar{\omega}} = \frac{v}{\epsilon_A} m_{z_1}^{\omega}; \quad m_{z_1}^{\bar{\alpha}} = m_{z_1}^{\alpha} \cdot \frac{v}{\epsilon_A}; \quad C_y^{\bar{\omega}} = C_y^{\omega} \frac{v}{\epsilon_A};$$

$\mu = \frac{2m}{\rho S \epsilon_A}$  - коефіцієнт відносної щільності літака в подовжньому русі.

#### 10.1.4 Залежність $\Delta m_{z_1}$ від $\Delta \alpha, \Delta \alpha, \Delta \delta_{\epsilon}$

Прирівнявши (10.3) і (10.13) знайдемо:

$$\Delta \omega_{z_1} = \frac{C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}} \Delta \alpha + \frac{\tau + C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}} \Delta \alpha + \frac{C_y^{\delta}}{\tau - C_y^{\omega}} \Delta \delta_{\epsilon}. \quad (10.19)$$

Підставивши (10.19) в (10.13), отримаємо:

$$\Delta m_{z_1} = \left( m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\omega} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}} \right) \Delta \alpha + \left( m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\omega} \frac{\tau + C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}} \right) \Delta \alpha +$$

$$+ \left( m_{z_1}^{\delta} + m_{z_1}^{\omega} \frac{C_y^{\delta}}{\tau - C_y^{\omega}} \right) \Delta \delta_{\epsilon}. \quad (10.20)$$

### 10.1.5. Залежність $\Delta C_y$ від $\Delta\alpha, \Delta\omega_z, \Delta\delta_\epsilon$

Підставивши значення  $\Delta\alpha$  з (10.6) в (10.3) та враховуючи (10.7), отримаємо:

$$\Delta C_y = \frac{C_y^\alpha}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}} \Delta\alpha + \frac{C_y^\alpha + C_y^\omega}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}} \Delta\omega_{z_1} + \frac{C_y^\delta}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}} \Delta\delta_\epsilon. \quad (10.21)$$

### 10.1.6 Залежність $\Delta C_y$ від $\Delta\alpha, \Delta\alpha, \Delta\delta_\epsilon$

Підставивши значення  $\Delta\omega_\alpha$  з (10.6) в (10.3) та враховуючи (10.7), отримаємо:

$$\Delta C_y = \frac{C_y^\alpha}{1 - \frac{C_y^\omega}{\mu}} \Delta\alpha + \frac{C_y^\alpha + C_y^\omega}{1 - \frac{C_y^\omega}{\mu}} \Delta\alpha + \frac{C_y^\delta}{1 - \frac{C_y^\omega}{\mu}} \Delta\delta_\epsilon. \quad (10.22)$$

### 10.1.7 Залежність $\Delta C_y$ від $\Delta\alpha, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_\epsilon$

Взявши похідну за часом від лівої і правої частини рівняння (10.21) і підставивши значення  $\Delta\alpha$  з (10.6), отримаємо:

$$\Delta \dot{C}_y = \frac{C_y^\alpha}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}} \left( \Delta \omega_{z_1} - \frac{g}{v} \Delta n_y \right) + \frac{C_y^\alpha + C_y^\omega}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}} \Delta \omega_{z_1} + \frac{C_y^\delta}{1 + \frac{C_y^\delta}{\mu}} \Delta \dot{\delta}_\epsilon. \quad (10.23)$$

**10.2. Характеристики стійкості і керованості та їх оцінки за лінеаризованим рівнянням сили  $Y$  і моменту  $M_{z_1}$ .**

Запишемо рівняння, відповідні (10.12), (10.18), (10.20):

$$\Delta \dot{\omega}_{z_1} = a_1 \Delta n_y + a_2 \Delta \omega_{z_1} + a_3 \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.24)$$

$$\Delta \dot{\omega}_{z_1} = e_1 \Delta \alpha + e_2 \Delta \omega_{z_1} + e_3 \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.25)$$

$$\Delta \dot{\omega}_{z_1} = C_1 \Delta n_y + C_2 \Delta \alpha + C_3 \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.26)$$

$$\Delta \dot{\omega}_{z_1} = d_1 \Delta \alpha + d_2 \Delta \omega_{z_1} + d_3 \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.27)$$

$$\Delta n_y = e_1 \Delta \alpha + e_2 \Delta \omega_{z_1} + e_3 \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.28)$$

$$\Delta n_y = f_1 \Delta \alpha + f_2 \Delta \dot{\alpha} + f_3 \Delta \delta_\epsilon, \quad (10.29)$$

$$\Delta \dot{n}_y = P_1 \left( \Delta \omega_{z_1} - \frac{g}{v} \Delta n_y \right) + P_2 \Delta \omega_{z_1} + P_3 \Delta \dot{\delta}_\epsilon, \quad (10.30)$$

де, з урахуванням залежностей (10.12), (10.13), (10.14), (10.20) відповідно враховуючи що

$$\Delta m_{z_1} = \frac{J_{z_1}}{q S \epsilon_A} \Delta \dot{\omega}_{z_1}, \quad (10.31)$$

маємо:

$$a_1 = \frac{q S \epsilon_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^{C_y} \left( \frac{G}{q S} + C_y^\alpha \frac{g}{v} \right) - m_{z_1}^\alpha \frac{g}{v} \right], \quad (10.32)$$

$$a_2 = \frac{q S \epsilon_A}{J_{z_1}} \left[ \left( m_{z_1}^\alpha + m_{z_1}^\omega \right) - m_{z_1}^{C_y} \left( C_y^\alpha + C_y^\omega \right) \right], \quad (10.33)$$

$$a_3 = \frac{q S \epsilon_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\delta - m_{z_1}^{C_y} C_y^\delta \right], \quad (10.34)$$

$$\epsilon_1 = \frac{q S \epsilon_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\alpha - m_{z_1}^\alpha \frac{C_y^\alpha}{\tau + C_y^\alpha} \right], \quad (10.35)$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\omega + m_{z_1}^\alpha \frac{\tau - C_y^\omega}{\tau + C_y^\alpha} \right], \quad (10.36)$$

$$\mathfrak{e}_3 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\delta - m_{z_1}^\alpha \frac{C_y^\delta}{\tau + C_y^\alpha} \right], \quad (10.37)$$

$$C_1 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ \left( m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} \right) - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu} \right] \frac{G}{q S}, \quad (10.38)$$

$$C_2 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_2}} \left[ \left( m_{z_1}^\alpha + m_{z_1}^\omega \right) - m_{z_1}^{C_y} C_y^\alpha \right], \quad (10.39)$$

$$C_3 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} [m_{z_1}^\delta - C_y^\delta], \quad (10.40)$$

$$d_1 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\alpha + m_{z_1}^\omega \frac{C_y^\alpha}{\tau - C_y^\omega} \right], \quad (10.41)$$

$$d_2 = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\alpha + m_{z_1}^\omega \frac{\tau + C_y^\alpha}{\tau - C_y^\omega} \right], \quad (10.42)$$

$$d_3 = \frac{q S \epsilon_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^\delta + m_{z_1}^\omega \frac{C_y^\delta}{\tau - C_y^\omega} \right], \quad (10.43)$$

$$e_1 = \frac{q S}{G} \cdot \frac{C_y^\alpha}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}}, \quad (10.44)$$

$$e_2 = \frac{q S}{G} \cdot \frac{C_y^\alpha + C_y^\omega}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}}, \quad (10.45)$$

$$e_3 = \frac{q S}{G} \cdot \frac{C_y^\delta}{1 + \frac{C_y^\alpha}{\mu}}, \quad (10.46)$$

$$f_1 = \frac{q S}{G} \cdot \frac{C_y^\alpha}{1 - \frac{C_y^\alpha}{\mu}}, \quad (10.47)$$

$$f_2 = \frac{q S}{G} \cdot \frac{C_y^\alpha + C_y^\omega}{1 - \frac{C_y^\omega}{\mu}}, \quad (10.48)$$

$$f_3 = \frac{qS}{G} \cdot \frac{C_y^\delta}{1 - \frac{C_y^\omega}{\mu}}, \quad (10.49)$$

$$P_1 = e_1; \quad P_2 = e_2; \quad P_3 = e_3. \quad (10.50)$$

### 10.2.1. Передаточні функції каналу повздовжнього руху.

З рівняння (10.14), (10.15) складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\alpha} = C_{11} \Delta \alpha + C_{12} \Delta \omega_z + C_{13} \Delta \delta_\theta \\ \Delta \dot{\omega}_{z_1} = C_{21} \Delta \alpha + C_{22} \Delta \omega_{z_1} + C_{23} \Delta \delta_\theta \end{cases}, \quad (10.51)$$

де відповідно (10.14), (10.15):

$$C_{11} = -\frac{C_y^\alpha}{t + C_y^\alpha}; \quad C_{12} = \frac{t - C_y^\omega}{t + C_y^\alpha}; \quad C_{13} = \frac{C_y^\delta}{t + C_y^\alpha};$$

$$C_{21} = \frac{qS\epsilon_A}{J_{z_1}} \left( m_{z_1}^\alpha - m_{z_1}^\alpha \frac{C_y^\alpha}{t + C_y^\alpha} \right);$$

$$C_{22} = \frac{qS\epsilon_A}{J_{z_1}} \left( m_{z_1}^\omega - m_{z_1}^\alpha \frac{t - C_y^\omega}{t + C_y^\alpha} \right);$$

$$C_{23} = \frac{qS\epsilon_A}{J_{z_1}} \left( m_{z_1}^\delta - m_{z_1}^\alpha \frac{C_y^\delta}{t + C_y^\alpha} \right);$$

Для визначення передаточних функцій, вважаючи в (10.51) початкові умови нульовими, перейдемо до змінної Лапласа  $-s$ , приведемо подібні, тоді отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:



$$\begin{cases} (S - C_{11})\Delta\alpha - C_{12}\Delta\omega_{z_1} = C_{13}\Delta\delta_\theta \\ -C_{21}\Delta\alpha + (S - C_{22})\Delta\omega_{z_1} = C_{23}\Delta\delta_\theta \end{cases} \quad (10.52)$$

Для визначення передаточних функцій за кутом  $\alpha$  і швидкістю  $\omega_{z_1}$  достатньо знайти головний визначник і визначники  $\Delta\omega_{z_1}$ ,  $\Delta\alpha$ , системи (10.52):

$$\Delta = s^2 - (C_{11} + C_{22})S + (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}), \quad (10.53)$$

$$\Delta\alpha = C_{13}s - (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}), \quad (10.54)$$

$$\Delta\omega_{z_1} = C_{23}s - (C_{23}C_{11} - C_{13}C_{21}). \quad (10.55)$$

Крім того, враховуючи (10.6), знайдемо:

$$\Delta n_y = \frac{v}{g} (\Delta\omega_{z_1} - S\Delta\alpha). \quad (10.56)$$

Передавальні функції  $W_\alpha(s), W_{\omega_{z_1}}(s), W_{n_y}(s)$  між керуючим впливом  $\delta_\theta$  і реакціями на нього  $\alpha, \omega_{z_1}$  і  $n_y$ , відповідно рівні:

$$\begin{aligned} W_\alpha(s) &= \frac{\Delta\alpha}{\Delta}; \quad W_{\omega_{z_1}}(s) = \frac{\Delta\omega_{z_1}}{\Delta}; \\ W_{n_y}(s) &= \frac{v}{g} [W_{\omega_{z_1}}(s) - sW_\alpha(s)] \end{aligned}$$

З виразів (10.53-10.55) і значень  $C_{ij}$  для рівняння (10.51) випливає, що вільний член  $(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})$  в загальному знаменнику (10.53) передавальних функцій, що визначає запас аперіодичної стійкості літака в каналі поздовжнього руху, дорівнює:

$$\begin{aligned}
(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) &= \frac{qS\vartheta_A}{J_{z_1}} \cdot \\
\cdot \left\{ (-1) \left[ m_{z_1}^{\alpha} - m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right] \frac{\tau - C_y^{\omega}}{\tau + C_y^{\alpha}} - \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\alpha}} \left[ m_z^{\omega} + \frac{\tau - C_y^{\omega}}{\tau + C_y^{\alpha}} m_{z_1}^{\alpha} \right] \right\} = \\
&= -\frac{qS\vartheta_A C_y^{\alpha}}{J_{z_1}} \left[ m_z^{C_y} \frac{\mu - C_y^{\omega}}{\mu + C_y^{\alpha}} + \frac{m_z^{\omega}}{\mu + C_y^{\alpha}} \right] = \quad (10.57) \\
&= -\frac{qS\vartheta_A C_y^{\alpha}}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_z^{\omega}}{\mu} - m_z^{C_y} \frac{C_y^{\omega} + C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}} - \frac{m_z^{\omega}}{\mu} \cdot \frac{C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}} \right].
\end{aligned}$$

Коефіцієнт  $(C_{11} + C_{22})$  при  $s$  в (10.53), що визначає запас коливальної стійкості, дорівнює:

$$\begin{aligned}
-(C_{11} + C_{22}) &= -\frac{qS\vartheta_A}{J_{z_1}v} \left( m_{z_1}^{\omega} + m_{z_1}^{\alpha} - m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\omega} + C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}} \right) + \\
&\quad + \frac{C_y^{\alpha} v}{\mu + C_y^{\alpha}} \frac{\vartheta_A}{\mu + C_y^{\alpha}} \quad (10.58)
\end{aligned}$$

Значення коефіцієнтів чисельників  $\Delta\alpha, \Delta\omega_{z_1}, \Delta n_y$  передавальних функцій, відповідно рівні:

для  $\Delta\alpha$ :

$$-(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{21}) = \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{C_y^{\delta}}{\mu + C_y^{\alpha}} + m_{z_1}^{\delta} \frac{\mu - C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\alpha}} \right], \quad (10.59)$$

$$C_{13} = -\frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\alpha}}; \quad (10.60)$$

для  $\Delta\omega_{z_1}$  :

$$-(C_{11}C_{23} - C_{13}C_{21}) = -\frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\alpha}} - m_{z_1}^{\delta} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right], \quad (10.61)$$

$$C_{23} = \left( m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right) \frac{q S \mathfrak{e}_A}{J_{z_1}}. \quad (10.62)$$

Для  $\Delta n_y$  - вільний член дорівнює виразу (10.61), помноженому на

$\frac{\nu}{g}$ . Коефіцієнт при  $s$  в (10.53) дорівнює:

$$\frac{v}{g} \frac{q S \vartheta_A}{J_{z_1}} \left[ m_{z_1}^{\delta} \frac{C_y^{\alpha} + C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\alpha}} - \left( m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} \right) \frac{C_y^{\delta}}{\mu + C_y^{\alpha}} \right]$$

Коефіцієнт  $s^2$  дорівнює:

$$- \frac{v}{g} \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\alpha}}$$

### 10.2.2. Вираз для оцінок характеристик стійкості і керованості в каналі поздовжнього руху літака.

*Запас стійкості* (аперіодичної) *по перевантаженню* при фіксованому управлінні ( $\sigma_n$ ).

а). З (10.3) випливає, що справжнє значення запасу стійкості таке:

$$\sigma_n = \frac{J_{z_1}}{q S \vartheta_A C_y^{\alpha}} (C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}) = m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\omega}} + C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}} - \frac{m_{z_1}^C}{\mu} \frac{C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}}. \quad (10.63)$$

б). З (10.24), (10.32 10.34) виходить, що оцінка  $\hat{\sigma}_n$  істинного запасу стійкості  $\sigma_n$  (4.63) дорівнює:

$$\hat{\sigma}_n = \frac{J_{z_1}}{G \vartheta_A} \left( a_1 + \frac{g}{v} a_2 \right) = m_{z_1}^{C_y} + m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\alpha}}{\mu} - \frac{m_{z_1}^{C_y^{\alpha}}}{\mu} + \frac{m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\alpha} + C_y^{\bar{\omega}}}{\mu} = m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} - \frac{m_{z_1}^{C_y} \cdot C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}. \quad (10.64)$$

Методична похибка у визначенні істинного запасу стійкості  $\sigma_n$  по

оцінці  $\hat{\sigma}_n$  (10.64):

$$\begin{aligned} \delta\sigma_n = \hat{\sigma} - \sigma_n &= m_{z_1}^{C_y} \left[ \frac{C_y^{\bar{\omega}} + C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu + C_y^{\bar{\alpha}}} - \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu} \right] + \\ &+ m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu \left( \mu + C_y^{\bar{\alpha}} \right)} = m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\alpha}} (\mu - C_y^{\bar{\omega}})}{\mu \left( \mu + C_y^{\bar{\alpha}} \right)} + m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu \left( \mu + C_y^{\bar{\alpha}} \right)} = \\ &= \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu \left( \mu + C_y^{\bar{\alpha}} \right)} \cdot \left[ m_{z_1}^{C_y} (\mu - C_y^{\bar{\omega}}) + m_{z_1}^{\bar{\omega}} \right]. \end{aligned} \quad (10.65)$$

При  $m_z^{C_y} < 0$ ,  $m_z^{\bar{\omega}} < 0$ ,  $C_y^{\bar{\alpha}} > 0$ , що має місце для сталого перевантаження літака  $n_y$ , величина  $\delta\sigma_n < 0$ , тобто оцінка (10.64) запасу (10.63) буде більше (за абсолютною величиною) на величину (10.65). Враховуючи реальні співвідношення величин:  $\mu = 50 \div 100$ ;

$C_y^{\bar{\omega}} = 1 - 2$ ;  $C_y^{\bar{\alpha}} = 0,5 - 1$ ;  $m_{z_1}^{C_y} = 0,1 - 0,3$ ;  $m_{z_1}^{\bar{\omega}} = 10 - 25$  - вираз (10.65) можна записати наближено:

$$\delta\sigma_n \cong \left( m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} \right) \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu} \approx \sigma_n \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu}. \quad (10.66)$$

Тоді відносна похибка  $\delta\sigma_n / \sigma_n$  дорівнює:

$$\frac{\delta\sigma_n}{\sigma_n} \cong \frac{C_y^{\alpha}}{\mu}. \quad (10.67)$$

Враховуючи реальний порядок величин  $C_y^{\alpha}$  і  $\mu$  можна вважати, що оцінка (10.64) практично збігається з істинним значенням (10.63).

Відносна помилка не перевищить 1-2% від  $\sigma_n$ .

### 10.2.3 Нейтральна центровка по перевантаженню літака.

Оцінка  $\hat{X}_n$  нейтрального центрування  $\hat{X}_n$  літака з перевантаження  $n_y$  у відсотках від САХ визначається за формулою

$$\hat{X}_n = \overline{X}\% + \left| \hat{\sigma}_n \right| \cdot 100\%, \quad (10.68)$$

де  $\hat{\sigma}_n$  - оцінка (10.64) або (10.63),

$\overline{X}_T\% = \frac{\overline{X}_T}{\theta_A} 100\%$  - поздовжня центровка літака у відсотках САХ,

що відраховується від носка САХ.

### 10.2.4. Витрата руля висоти на одиницю перевантаження.

Оцінка  $\hat{\delta}_e^{C_y}$  коефіцієнта  $\delta_e^{C_y}$  витрати руля висоти  $\delta_e$  на одиницю перевантаження  $n_y$  визначається з рівняння (10.18) при

$\Delta m_{z_1} = \Delta \alpha = 0$ , як відношення коефіцієнтів  $C_1$  і  $C_3$  при  $\Delta n$  та  $\Delta \delta_\epsilon$ :

$$\delta_\epsilon^{n_y} = - \frac{\left( m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} \right) - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu} \frac{G}{q S}}{m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{C_y} \cdot C_y^{\delta}}, \quad (10.69)$$

що еквівалентно відношенню коефіцієнтів рівняння (10.24):

$$\delta_\epsilon^{C_y} = - \frac{a_1 + \frac{g}{v} a_2}{a_3}. \quad (10.70)$$

#### 10.2.5. Похідна від коефіцієнта поздовжнього моменту по рулю висоти.

а). Оцінка  $m_{z_1}^{\delta_\epsilon}$  похідної  $m_{z_1}^{\delta_\epsilon}$  може бути обчислена шляхом множення одного з коефіцієнтів  $a_3, b_3, c_3$  або  $d_3$  на  $J_{z_1}/q S v_A$  рівнянь (10.24-10.27). Найбільш близькою буде оцінка:

$$m_{z_1}^{\delta_a} = \frac{J_{z_1}}{q S b_A} \cdot b_3. \quad (10.71)$$

Підставивши в (10.71) значення (10.34)  $\beta_3$ , отримаємо:

$$m_{z_1}^{\delta_a} = \frac{J_{z_1}}{q S b_A} \cdot b_3 = m_{z_1}^{\delta_a} - m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\delta}}{\mu + C_y^{\alpha}},$$

при  $\bar{m}_{z_1}^\alpha < 0$ ,  $C_y^\delta < 0$  ця оцінка буде занижена за абсолютною величиною на 1-5% в залежності від  $C_y^\delta, \bar{m}_{z_1}^\alpha, C_y^\alpha, \mu$ .

б). Коефіцієнт  $\bar{m}_{z_1}^{\delta_e}$  може бути визначений із передаточної функції по  $\omega_{z_1}$  через коефіцієнт  $(C_{13}, C_{21} - C_{23} C_{11})$  чисельника, помноженого на  $\frac{v}{g}$ :

$$\bar{m}_{z_1}^{\delta_e} = \frac{v}{g} \frac{J_{z_1} G}{q^2 S^2 \vartheta_A C_y^\alpha} (C_{13} C_{21} - C_{23} C_{11}) \quad (10.72)$$

Методична похибка буде дорівнювати:

$$\delta \bar{m}_{z_1}^{\delta_e} = \bar{m}_{z_1}^{\delta_e} - m_{z_1}^{\delta_e} = \frac{\bar{m}_{z_1}^{\delta_e} \cdot \bar{C}_y^\alpha}{\mu + \bar{C}_y^\alpha} + m_{z_1}^{C_y} C_y^{\delta_e} \left( 1 - \frac{\bar{C}_y^\alpha}{\mu + \bar{C}_y^\alpha} \right).$$

#### 10.2.6. Коефіцієнт моменту повздовжнього сумарного демпфування

Оцінка  $\bar{m}_{z_1}^{*\alpha}$  коефіцієнта моменту подовжнього сумарного демпфування:

$$\bar{m}_{z_1}^{*\alpha} = m_{z_1}^\alpha + \overline{m_{z_1}^{\omega_{z_1}}}$$

може бути обчислена шляхом множення одного із коефіцієнтів рівнянь (10.24-10.27)  $a_2, \vartheta_2, c_2$  або  $d_2$  на  $J_{z_1} v / q S \vartheta_A$ . Найбільш близькою буде наступна



$$\overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha} = \frac{J_{z_1} v}{q S b_A} \cdot b_2$$

Підставивши у (10.74) значення (10.36), отримаємо:

$$\overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha} = m_{z_1}^{*\alpha} - m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\omega} + C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}},$$

при  $m_{z_1}^{\alpha} < 0$ ,  $C_y^{\omega} > 0$ ,  $C_y^{\alpha} > 0$  оцінка (10.74) занижена по абсолютній величині на величину

$$\delta \overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha} = -m_{z_1}^{\alpha} \frac{C_y^{\omega} + C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}} \cong -\frac{m_{z_1}^{\alpha}}{\mu} C_y^{*\alpha}.$$

Так як  $\left| m_{z_1}^{\alpha} \right| < \left| m_{z_1}^{*\alpha} \right| \cdot \left| C_y^{*\alpha} \right| \approx (1 \div 2)$ ,  $\mu \approx (50 - 100)$ , то  $\delta \overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha}$  складе

одиниці процентів от  $m_{z_1}^{*\alpha}$ . Оцінка  $m_{z_1}^{*\alpha}$  може бути визначена з передаточної функції (10.53) каналу повздовжнього руру.

$$\overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha} = \frac{J_{z_1}}{m \vartheta_A^2} \left[ C_y^{\alpha} + (C_{11} + C_{22}) \frac{2m}{\rho v S} \right]$$

Для оцінки методичної похибки  $\delta \overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha}$  достатньо підставити у (10.75) значення  $(C_{11} + C_{22})$  із (10.51):

$$\delta \overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha} = \overset{\wedge}{m}_{z_1}^{\alpha} - \frac{J_{z_1}}{m \vartheta_A} \left\{ C_y^{\alpha} + \left[ \frac{-C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\alpha}} + \frac{q S \vartheta_A}{J_{z_1}} \left( m_{z_1}^{\omega_{z_1}} + m_{z_1}^{\alpha} \frac{\tau - C_y^{\omega_{z_1}}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu + C_y^{\alpha}} \left[ m_{z_1}^{\alpha} \left( C_y^{\alpha} + C_y^{\omega} \right) + \frac{J_{z_1}}{m + \vartheta_A^2} C_y^{\alpha} \cdot C_y^{\alpha} \right].$$

Похибка з урахуванням реальних значень складе одиниці відсотків від оцінки  $\overset{\wedge}{m}_{z_1}^{*\alpha}$ . Величина -  $(C_{11} + C_{22})$  в (10.53) характеризує запас коливальної стійкості по перевантаженню: чим менше -  $(C_{11} + C_{22})$ , тим слабкіше демпфування вільних коливань.

### 10.2.7. Похідна коефіцієнта підйомної сили за кутом атаки.

Оцінка  $\overset{\wedge}{C}_y^{\alpha}$  похідної  $C_y^{\alpha}$  може бути обчислена шляхом множення одного з коефіцієнтів  $e_1, f_1$  або  $P_1$  рівнянь (10.28 – 10.30) на  $\frac{G}{qS}$ :

$$\overset{\wedge}{C}_y^{\alpha} = \frac{G}{qS} \cdot e_1 = \frac{G}{qS} \cdot P_1 \quad (10.76)$$

Підставивши у (10.76) значення  $\ell_1$  або  $P_2$  (10.45), (10.50) отримаємо

$$\overset{\wedge}{C}_y^{\alpha} = C_y^{\alpha} - C_y^{\alpha} \frac{C_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}},$$

при  $C_y^\alpha > 0$ ,  $\dot{C}_y^\alpha > 0$  оцінка (10.76) занижена на величину

$$C_y^\alpha \frac{\dot{C}_y^\alpha}{\mu + C_y^\alpha}.$$

### 10.2.8. Похідна коефіцієнту підйомної сили по керму висоти.

а) Оцінка  $\hat{C}_y^\delta$  похідної  $C_y^\delta$  може бути обчислена як добуток одного з коефіцієнтів  $e_3$ ,  $f_3$  або  $P_3$  рівнянь (10.28 – 10.30) на  $\frac{G}{qS}$ :

$$\hat{C}_y^\delta = \frac{G}{qS} e_3$$

Згідно (10.46) оцінка (10.78)

$$\hat{C}_y^\delta = C_y^\delta - C_y^\delta \frac{\dot{C}_y^\alpha}{\mu + C_y^\alpha} \quad (10.79)$$

занижена по абсолютній величині на величину  $C_y^\delta \frac{\dot{C}_y^\alpha}{\mu + C_y^\alpha}$ , а

оцінка

$$\hat{C}_y^\delta = \frac{G}{qS} f_3 = \frac{G}{qS} P_3 \quad (10.80)$$

згідно (10.49)

$$\hat{C}_y^\delta = C_y^\delta + C_y^\delta \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\bar{\omega}}} \quad (10.81)$$

завищена на  $C_y^\delta \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\bar{\omega}}}$ .

б) Оцінка  $\hat{C}_y^\delta$  похідної  $C_y^\delta$  може бути наближено обчислено через коефіцієнт  $a_1, a_2, a_3, \epsilon_3$  як співвідношення

$$\hat{N}_y^\delta \cong \frac{G}{qS} \frac{b_3 - a_3}{a_1 + \frac{g}{v} a_2}, \quad (10.82)$$

еквівалентне відношення  $(J_{z_1}/qS\epsilon_A) \cdot (\epsilon_3 - a_3)$  до значення  $\hat{\sigma}_n$ , близькому к  $m_{z_1}^{C_y}$ , знайденому за формулою (10.64), що рівне приблизно дорівнює:

$$\hat{C}_y^\delta \approx C_y^\delta \frac{m_{z_1}^\alpha}{\mu + C_y^\alpha}. \quad (10.83)$$

### 10.2.9. Коефіцієнт сили поздовжнього сумарного демпфування.

а) Оцінка  $\hat{C}_y^{*\alpha}$  коефіцієнта

$$C_y^{*\alpha} = C_y^\alpha + C_y^{\bar{\omega}} \quad (10.84)$$

може бути обчислена як добуток одного з коефіцієнтів  $e_2, f_2$  або  $P_2$  рівнянь (10.28 – 10.30) на  $\tau$ :

$$\hat{C}_y^{*\alpha} = \frac{G}{qS} \frac{v}{\hat{a}_{\lambda}} \cdot e_2; \quad (10.85)$$

згідно (10.44) оцінка (10.85) занижена:

$$\hat{N}_i^{\alpha} = \tilde{N}_i^{*\alpha} - \tilde{N}_i^{*\alpha} \frac{\tilde{N}_y^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}}, \quad (10.86)$$

а оцінка

$$\hat{C}_y^{\alpha} = \frac{G}{qS} \frac{v}{b_{\lambda}} f_2 = \frac{G}{qS} \frac{v}{b_{\lambda}} P_2, \quad (10.87)$$

згідно (10.44), завищена

$$\hat{C}_y^{\alpha} = C_y^{*\alpha} + C_y^{*\alpha} \frac{C_y^{\omega}}{\mu + C_y^{\omega}}. \quad (10.88)$$

Відносні похибки становлять одиниці відсотків.

б) Оцінка  $\hat{C}_y^{\alpha}$  може бути наближено обчислена через коефіцієнти  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $v_2$ , як відношення

$$\hat{C}_y^{\alpha} \cong \frac{G}{qS} \frac{v}{b_{\lambda}} \frac{b_2 - a_2}{a_1 + \frac{g}{v} a_2} \quad (10.89)$$

еквівалентне відношенню  $\frac{J_{z_1}}{qS b_{\lambda}} (b_2 - a_2)$  і значенню  $\sigma_n$ ,

знайденому за формулою (10.64), що дорівнює:

$$\hat{C}_y^{*\alpha} \cong C_y^{*\alpha} - C_y^{*\alpha} \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{\mu + C_y^{\alpha}} \quad (10.90)$$

### 10.3. Критерії динамічної стійкості і керованості.

**10.3.1. Показник  $\omega_0^2/n_y^\alpha$  відношення квадрата кругової частоти  $\omega_0$  не демпфированим вільних коливань до коефіцієнта  $n_y^\alpha$ .**

Оцінка  $\omega_0^2/n_y^\alpha$  показника

$$\frac{\omega_0^2}{n_y^\alpha} = - \frac{\frac{\mu}{\tau^2} \frac{\sigma_n C_y^\alpha}{\bar{v}_z^2}}{\frac{qS}{G} C_y^\alpha} = - \frac{G b_{\dot{A}}}{J_{Z_1}} \sigma_n \quad (10.91)$$

(де  $\bar{v}_z^2 = \frac{J_{z_1}}{m b_{\dot{A}}^2}$ ) відповідно до виразу (10.64) визначається через коефіцієнти (10.24) наступним виразом:

$$\frac{\omega_0^2}{m_y^\alpha} = - \left( a_1 + \frac{g}{v} a_2 \right) \quad (10.92)$$

де згідно (10.66) оцінка (10.92) буде незначно завищена.

Методично точний вираз  $\omega_0^2/n_y^\alpha$  визначається з (10.63) згідно виразу (10.91).

### 10.3.2. Період $T$ вільних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}) - \frac{1}{4} (C_{11} + C_{22})^2}} \quad (10.93)$$

визначається через коефіцієнти знаменника (10.53) передаточної функції по  $\omega_z$ ,  $n_y$ , або  $\alpha$ . Оцінка  $\hat{T}$  періода  $T$  за величиною  $\sigma_n$  (10.64) може бути визначена за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\frac{q S B_A}{J_{z_1}} \hat{C}_y^\alpha \cdot \hat{\sigma}_n} \quad (10.94)$$

де  $\hat{C}_y^\alpha$  обчислена згідно (10.76) або (10.77).

### 10.3.3. Величина відносного закиду перевантаження $\Delta \bar{n}_y$ , приведеного до ступінчастому відхилення важеля $X_g$ .

Для визначення відносного закидання

$$\Delta \bar{n}_y = \frac{\Delta n_{y \max} - \Delta n_{y \text{ уст.}}}{\Delta n_y} \quad (10.95)$$

(де  $\Delta n_{y \max}$  - максимальне, а  $\Delta n_{y \text{ уст.}}$  - сталі значення відхилення  $\Delta n_y$ , викликаного ступінчастим відхиленням  $\Delta X_g$ ) необхідно обчислити кругову частоту і декремент загасання коливань  $h$ .  
Оцінка  $\hat{\omega}_0$  із (10.93) дорівнює  $2\pi/T$ , величина  $h$ , згідно (10.53), дорівнює:

$$h = -\frac{1}{2}(C_{11} + C_{22}),$$

або згідно (10.75) оцінка  $\hat{h}$  дорівнює:

$$\hat{h} = \frac{1}{2\pi} \left( \hat{C}_y^\alpha - \frac{\hat{m}_{z_1}^\alpha}{\hat{\nu}_z} \right), \text{ де } \hat{\nu}_{z_1}^{-2} = \frac{J_{z_1}}{m b_A} \text{ в } C_y^\alpha \text{ і } \hat{m}_{z_1}^\alpha, \text{ визначаються}$$

згідно (10.77), (10.78) и (10.74) відповідно. Тоді оцінка  $\Delta \bar{n}_y$  відносного закидання для випадку перехідних процесів з перерегулюванням дорівнює:

$$\Delta \hat{n}_y = e^{-\pi} \frac{\hat{h}}{\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{h}^2}} \quad (10.96)$$

або

$$\Delta \hat{n}_y = e^{-\pi} \frac{\hat{h}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (10.97)$$

де  $\xi$  - коефіцієнт відносного демпфування коливань,  $\xi = \frac{\hat{h}}{\hat{\omega}_0}$ .

**10.3.4. Час  $t_{c\text{ раб.}}$  першого виходу літака на сталу перевантаження (для коливальних перехідних процесів):**

$$t_{c\text{ раб.}} = \frac{\arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)}{\hat{\omega}_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (10.98)$$

**10.3.5. Час  $t_{\text{зат.}}$  входу  $\Delta n_y$  у зону 5% відхилення від  $\Delta n_{y\text{ уст.}}$**

$$t_{\text{зат.}} \cong \frac{3}{\hat{h}} \quad (10.99)$$

де оцінки  $\hat{\omega}_0$ ,  $\hat{\xi}$  и  $\hat{h}$  визначені вище.

**10.3.6. Показник інтенсивності затухання амплітуди за період**

$$m_{\text{зат.}} = e^{-\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{h}^2}} \quad (10.100)$$



#### 10.4. Незміщене оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки ЛА

Повздовжній збурений рух ЛА описується простою моделлю (10.6), (10.9). Мала розмірність базису частково знімає проблему мультиколеніарності змінних, яка приводить до некоректності рішення задачі оцінювання коефіцієнтів рівнянь руху і обчислення по них аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) і характеристик. У такій ситуації основною похибкою оцінок є їх зміщення внаслідок наближеності стаціонарної лінійної моделі (10.6), (10.9), яка не враховує наступний ряд чинників:

1. Літак або інший ЛА, як правило, несиметричний відносно площини  $XOZ$ . Внаслідок, цього, а також впливу обдуву від двигунів, динаміка кабірування і пікірування, навіть при малих  $\Delta\alpha$ , буде різною. Отже різними будуть і коефіцієнти рівнянь (10.6), (10.9).

2. За дуже малих відхилень  $\Delta\delta_B$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\overline{\Delta\omega_z}$  лінійна модель точна, але вона погано ідентифікується в силу збільшення співвідношення шум - сигнал і впливу вже відчутних інших, невраховуваних в моделі, факторів: зміна швидкості, тяги двигунів, аеропружних, турбулентності атмосфери та ін. Основні фактори  $\Delta\alpha$ ,  $\overline{\Delta\omega_z}$ ,  $\Delta\delta_B$  повинні бути істотними. Ці відхилення мають обмеження знизу - по суттєвості, зверху - по нелінійності.

3. Аналогічно обмеженням по амплітуді  $\Delta\delta_B$  і, як наслідок по  $\Delta\alpha$ ,  $\overline{\Delta\omega_z}$ , вводяться обмеження знизу і зверху на швидкість  $\dot{\Delta\delta}_\epsilon$  зміни положення керма висоти  $\Delta\delta_B$ . При повільній зміні динаміка відсутня і тривимірний базис  $\Delta\alpha$ ,  $\overline{\Delta\omega_z}$ ,  $\Delta\delta_B$  вироджується в одно - або двовимірний. Система вироджена. Зворотна задача некоректна по Тихонову. За дуже різкої зміни  $\Delta\delta_B$ , наприклад різкому переході з кабірування в пікірування або навпаки виникає додаткове "антидемпфування" за рахунок розгибу раніше злегка прогнutoї осі  $X_1X_1$  хвоста літака. Для таких режимів від'ємний коефіцієнт сумарного демпфування біля  $\overline{\Delta\omega_z}$  в рівнянні (10.6) при його оцінюванні по реальним даним буде занижений за

абсолютною величиною або навіть позитивний. Це пояснюється неадекватністю моделі (10.6) процесу. Прямий облік ефекту аеропружності фюзеляжу літака у вигляді двохмасової моделі  $m_1$  і  $m_2$  з пружним зв'язком  $\ell$  вимагає додаткових датчиків для реєстрації прогину хвоста, літака щодо будівельної осі  $X_1X_1$ . Непрямий облік цього і всіх інших невимірних або тих, що не увійшли в модель (10.6), (10.9) чинників запропонований нижче у вигляді постановки завдання планування і обробки даних, експерименту альтернативної, застосовуваної для оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів в бічному русі ЛА. Уточнимо основні складові даного підходу:

**Мета.** З фізично реалізуемого натурального експерименту знайти оцінки АДК з максимально можливою точністю при обмеженнях на інтервали зміни часу експерименту і амплітуди відхилень змінних.

Тут слід уточнити поняття АДК: аеродинамічний коефіцієнт це похідна від моменту тангажу  $m_{z_1}$  чи підйомної сили  $C_y$  по відповідній змінній  $\alpha$ ,  $\omega_{z_1}$ ,  $\delta_B$ ,  $\alpha$ ,  $M$ ,  $t$  і т.д), взята у фіксованій точці простору - часу. Таке визначення АДК буде тотожним коефіцієнтам моделей (10.6), (10.9) лише за умови коли відхилення  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_{z_1}$ ,  $\Delta\delta_B$ ,  $\Delta t$  (та інш.) прагнуть до нуля. Але тоді співвідношення "шум - сигнал" необмежено зростають і оцінювання АДК буде неможливим. Необхідно спланувати експеримент так, щоб вирішити зазначене протиріччя.

Розумним компромісом між лінійною моделлю ПД (10.6), (10.9), справедливою для малих відхилень, і повної нелінійної нестационарної (10.1) (10.6), справедливою для всіх режимів польоту, буде модель ПД представлена першим і другим членами розкладання нелінійної моделі ряд Тейлора. Передбачається також, що в межах одного експерименту висота (барометричний тиск), швидкість (швидкісний напір  $0,5 \rho v^2$ ), конфігурація літака, його

центрування і маса змінюються несуттєво, в сенсі впливу на зміну АДК. Тоді, наприклад для  $m_{z_1}$ , получимо (10.113).

$$\begin{aligned}
 m_{z_1}(t) = m_{z_1}(t_0) &+ \left. \frac{\partial m_{z_1}}{\partial \alpha} \right|_{t_0} \cdot \Delta \alpha(t) + \left. \frac{\partial m_{z_1}}{\partial \omega_{z_1}} \right|_{t_0} \cdot \Delta \omega_{z_1}(t) + \left. \frac{\partial m_{z_1}}{\partial \delta_B} \right|_{t_0} \times \\
 &\times \Delta \delta_B(t) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \alpha^2} \right|_{t_0} \cdot (\Delta \alpha(t))^2 \times \\
 &\times \left[ + \left. \frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \omega_{z_1}} \right|_{t_0} \cdot (\Delta \omega_{z_1}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \delta_B} \right|_{t_0} \cdot (\Delta \delta_B(t))^2 \right] + \\
 &+ \left. \frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \alpha \partial \omega_{z_1}} \right|_{t_0} \cdot \Delta \alpha(t) \cdot \Delta \omega_{z_1}(t) + \left. \frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \alpha \partial \delta_B} \right|_{t_0} \cdot \Delta \alpha(t) \times \\
 &\times \Delta \delta_B(t) + \left. \frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \omega_{z_1} \cdot \partial \delta_B} \right|_{t_0} \cdot \Delta \omega_{z_1} \cdot \Delta \delta_B(t)
 \end{aligned} \tag{10.113}$$

Така модель враховує несиметричність режимів кабрірованія і пікірування для обмежених відхилень. Але велика кількість її членів (дев'ять), серед яких тільки  $\Delta \delta_B$  незалежна змінна, а інші, з урахуванням взаємозв'язку їх рівнянням (10.6), її наслідки; взаємна корельованість, обмеженість і наближеність вимірювань збільшень, обмеженість часу одного режиму зміною швидкості і висоти (при постійній тязі двигунів), роблять завдання оцінювання всіх АДК некоректною внаслідок фізичної неможливості забезпечення ортогональності змінних і достатньою довжини вибірок.

Відповідно до мети експерименту нас цікавлять перші три лінійні члена розкладання (10.113).

Для точного їх оцінювання сплануємо натурний експеримент за наступною схемою, альтернативною до ортогональної. Нехай всі

змінні рівняння (10.113) будуть близькі за формою:  $\Delta\delta_B(t)$  - "сходинка";  $\Delta\alpha(t)$ ,  $\Delta\omega(t)$ , - відповідно до рівнянь динаміки короткоперіодичних ПД, експоненціальні функції - реакції ЛА на вплив  $\delta_B(t)$ . Перепишемо (10.113) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta m_{z_1}(t) = & \\ = & \left[ m_{z_1}^\alpha + \left( m_{z_1}^{\alpha^2} \cdot \Delta\alpha(t) + m_{z_1}^{\alpha\bar{\omega}_z} \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + m_{z_1}^{\alpha\delta_B} \cdot \Delta\delta_B(t) \right) \right] \Delta\alpha(t) + \\ + & \left[ m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} + \left( m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}\alpha} \cdot \Delta\alpha(t) + m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}^2} \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}\delta_B} \cdot \Delta\delta_B(t) \right) \right] \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + \\ + & \left[ m_{z_1}^{\delta_B} + \left( m_{z_1}^{\delta_B\alpha} \cdot \Delta\alpha(t) + m_{z_1}^{\delta_B\bar{\omega}_{z_1}} \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + m_{z_1}^{\delta_B^2} \cdot \Delta\delta_B(t) \right) \right] \Delta\delta_B(t), \end{aligned} \quad (10.114)$$

де кожен коефіцієнт складається з шуканого АДК і лінійної функції  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_z$ ,  $\Delta\delta_B$ . Якщо з певним досить грубим ступенем наближення у виразах для коефіцієнтів рівняння (10.114)  $\Delta\alpha(t)$ ,  $\Delta\omega_{z_1}(t)$ ,  $\Delta\delta_B(t)$  замінити відповідними ступінчастими функціями  $\Delta\alpha(\infty) \cdot 1(t)$ ,  $\Delta\omega_{z_1}(\infty) \cdot 1(t)$ ,  $\Delta\delta_B(\infty) \cdot 1(t)$ , де аргумент  $(\infty)$  відповідає часу появи сталого значення  $\Delta\alpha(t)$ ,  $\Delta\omega_{z_1}(t)$ ,  $\Delta\delta_B(t)$ , то, з точністю до цього наближення, рівняння (10.14) можливо представити у вигляді:

$$\Delta m_{z_1}(t) \cong a_2 \cdot \Delta\alpha(t) + a_1 \Delta\omega_{z_1}(t) + e_1 \Delta\delta_B(t) \quad (10.115)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 = & m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} + \left[ m_{z_1}^{\alpha\bar{\omega}_z} \cdot \Delta\alpha(\infty) + m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}^2} \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(\infty) + m_{z_1}^{\alpha\delta_B} \cdot \Delta\delta_B(\infty) \right], \\ a_2 = & m_z^\alpha + \left[ m_z^{\alpha^2} \cdot \Delta\alpha(\infty) + m_{z_1}^{\alpha\bar{\omega}_z} \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(\infty) + m_{z_1}^{\alpha\delta_B} \cdot \Delta\delta_B(\infty) \right], \\ e_1 = & m_z^{\delta_B} + \left[ m_z^{\delta_B\alpha} \cdot \Delta\alpha(\infty) + m_z^{\delta_B\bar{\omega}_{z_1}} \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(\infty) + m_z^{\delta_B^2} \cdot \Delta\delta_B(\infty) \right]. \end{aligned}$$

Чим ближче форма сигналів до "сходинки", тим точніше рівняння (10.15), але і тим гірше обумовленість інформаційної матриці. У силу взаємозв'язку змінних  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_{z_1}$ ,  $\Delta\delta_B$  управляти

"ступінчастістю" немає можливості. Але змінюючи амплітуду  $\Delta\delta_B(\infty)$ , ми можемо пропорційно змінювати зсув коефіцієнтів  $a_1, a_2, b_1$  відносно шуканих АДК:  $m_{z_1}^{\bar{\omega}_z}, m_{z_1}^{\alpha}, m_z^{\delta_B}$ .

Тоді, альтернативна ортогональній, постановка експерименту буде полягати в послідовність "дач" (сходинок) кермом висоти різної амплітуди, визначення зміщених коефіцієнтів  $a_1, a_2, b_1$  управління (10.115) і ліквідації цього зміщення шляхом лінійного апроксимації коефіцієнтів  $a_1, a_2, b_1$  у функції  $\Delta\delta_B(\infty), \Delta\alpha(\infty)$  або  $\Delta\omega_z(\infty)$ .

Наприклад:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= m_{z_1}^{\bar{\omega}_z} + k_1 \Delta\alpha_i(\infty), \\ a_{2i} &= m_{z_1}^{\alpha} + k_2 \Delta\alpha_i(\infty), \\ b_{1i} &= m_z^{\delta_B} + k_3 \Delta\alpha_i(\infty), \end{aligned} \quad (10.116)$$

де  $i$  - номери дач різної амплітуди.

У загальному випадку [3]  $i$ -й рядок векторно - матричного управління руху тіла, що враховує лінійні та квадратні члени Тейлоровской розкладання має вигляд:

$$\Delta y_i = \Delta X \cdot A_i + \Delta X B_i \Delta X^T$$

де

$$\begin{aligned} \Delta y_i^T &= [\Delta y_i(1), \Delta y_i(2), \dots, \Delta y_i(N)]; \\ A_i^T &= [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]; \end{aligned}$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1(1) & \Delta x_2(1) & \dots & \Delta x_n(1) \\ \Delta x_1(2) & \Delta x_2(2) & \dots & \Delta x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_1(N) & \Delta x_2(N) & \dots & \Delta x_n(N) \end{bmatrix};$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{i11} & \mathcal{G}_{i12} & \dots & \mathcal{G}_{i1n} \\ \mathcal{G}_{i21} & \mathcal{G}_{i22} & \dots & \mathcal{G}_{i2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{G}_{in1} & \mathcal{G}_{in2} & \dots & \mathcal{G}_{inn} \end{bmatrix};$$

$N$  і  $n$  - відповідно числа дискретні за часом і розмірністю вектора  $A_i$ .

Зміщена із - за неврахування квадратичної форми  $\Delta X B_i \Delta X^T$

МНК – оцінка  $\hat{A}_i$  вектора – колонки  $A_i$ :

$$\hat{A}_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta y_i \quad (10.118)$$

Її зсув пропорційний  $\Delta X^T$ :

$$\hat{A}_i - A_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta X B_i \Delta X^T = B_i \Delta X^T.$$

У ще більш загальному випадку модель (10.117) повинна бути розширена членами третього і вище порядку, і залежність зміщення оцінок від  $\Delta X$  буде носити нелінійний характер. Тому для ефективної реалізації альтернативного підходу, як уже говорилося, слід обмежити знизу і зверху діапазони зміни  $\Delta X$ .

Для підтвердження доцільності альтернативного підходу розглянемо чисельний приклад.

**Тестовий приклад 10.1.** Точна нелінійна модель

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) + \sum_{j,q=1, j \geq q}^3 x_j(k) x_q(k) \quad (10.119)$$

з одиничними коефіцієнтами  $\beta_i$  для чотирьох вибірок різної амплітуди  $X_{\max}$  апроксимувалася її лінійною частиною для таких сигналів

$$x_1(k) = x_{\max}(l) \sin\left(\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \quad x_2(k) = x_{\max}(l) \sin\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right),$$

$$x_3(k) = x_{\max}(l) \cos\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right) \quad (10.120)$$

$$k = \overline{1, M}, l = \overline{1, 4}.$$

Оцінки  $\hat{\beta}_j$  ( $j=1,2,3$ ) обчислювалися методом найменших квадратів (МНК). При цьому показник  $\varepsilon^T \varepsilon$  помилки  $\varepsilon$  апроксимації  $y(k)$  лінійною моделлю  $y(k) = \hat{\beta}_1 x_1(k) + \hat{\beta}_2 x_2(k) + \hat{\beta}_3 x_3(k)$  був на 2 порядки менше аналогічної норми  $\|\Delta y\|$ . Тобто задача апроксимації вирішується достатньо якісно. Але коефіцієнти  $\hat{\beta}_i$  були істотно зміщені (рис.10.2).

Лінійні регресійні залежності зсувів  $\Delta \beta_j$  ( $j=1,2,3$ ) від  $x_{\max}(l)$ , ( $l=1,2,3,4$ ), збігаються для нульової амплітуди  $x_{\max}$  до нуля; відповідно оцінки  $\hat{\beta}_j$  збігаються до істинних  $\beta_j=1$ .

Якщо бралася повна модель (10.119), то з регуляризацією по Тихонову МНК-оцінювання коефіцієнтів повної моделі (10.119) дало практично нульове значення показника  $\varepsilon^T \varepsilon$ .

Регуляризований показник:

$$I(\hat{\beta}, \alpha) = \|\Delta Y(y) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\| + \alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\| \quad (10.121)$$

де  $\alpha$  - параметр регуляризації,  $\beta_{apr}$  - апіорі заданий вектор параметрів. Але практично нульове значення показника  $\varepsilon^T \varepsilon$  досягається для самих різних значень  $\beta_{apr}$ , а оцінка  $\hat{\beta}$  близька до  $\beta_{apr}$ , а не до дійсної, рівної одиниці.

Для більшої наочності розглянемо двовимірну задачу, коли модель і об'єкт ізоморфні:

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k), \quad (10.122)$$

Тут  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  сильно корельовані. Тому функціонал  $\varepsilon^T \varepsilon$  (пунктирні лінії на рис.10.3) як функція  $\hat{\beta}$ , сильно випуклий для першого і третього квадранта площини  $(\beta_1, \beta_2)$  і слабо-випуклий («рівчак») для другого і четвертого квадрантів.

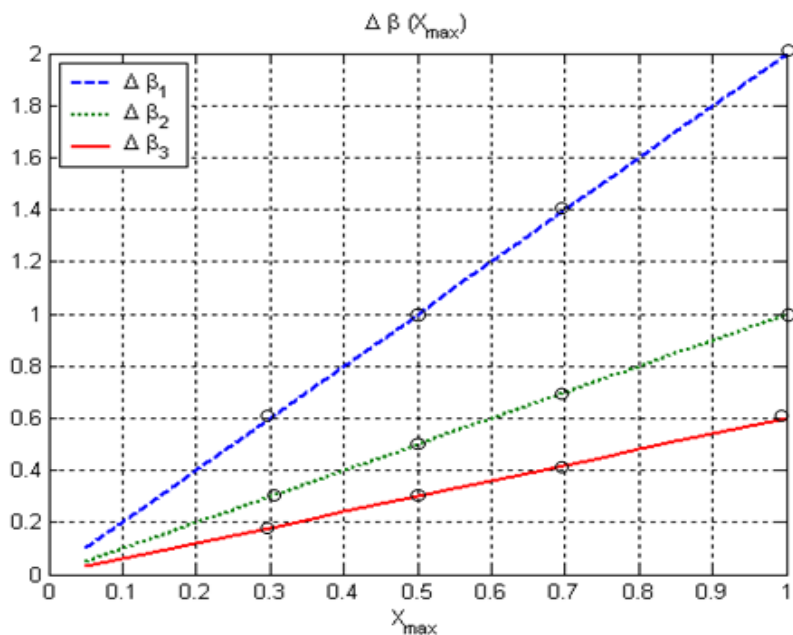


Рис. 10.2. Залежність  $\beta(x_{\max})$ .



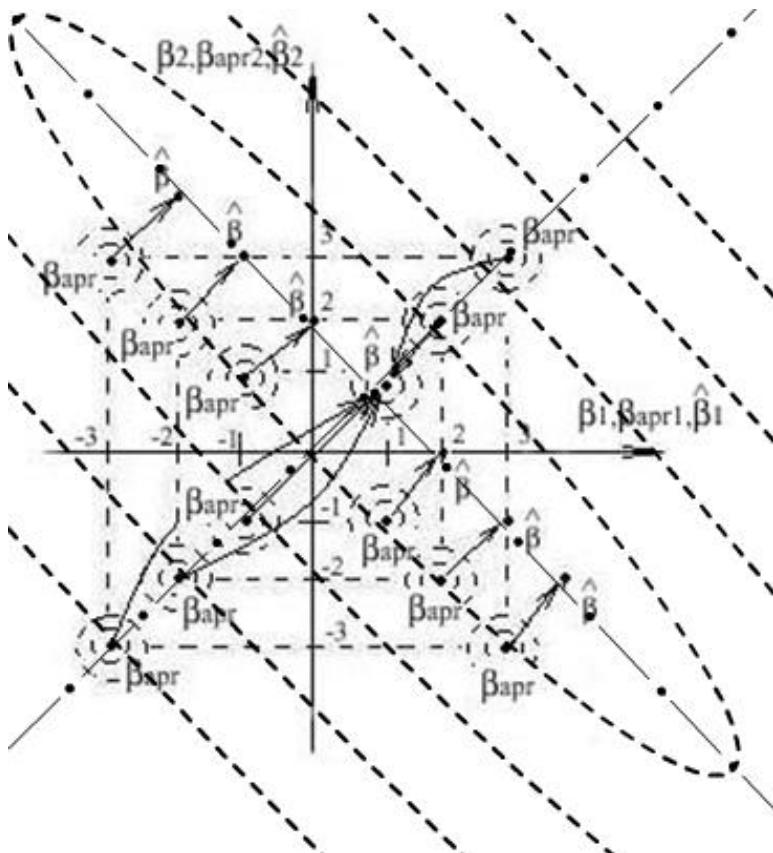


Рис.10.3. Точне значення  $\beta$  і її оцінка  $\hat{\beta}$ , отримана з умови мінімуму функціонала (10.121) для різних апіорних значень  $\beta_{apr}$

Регуляризуючий десятивідсотковий доданок  $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$  функціонала (10.121) (круги на рис.10.3) строго випуклий і, відповідно, робить випуклим функціонал (10.121). Стрілками показано процес мінімізації функціонала (10.121), в результаті якого з апіорної оцінки  $\beta_{apr}$  отримана апостеріорна оцінка  $\hat{\beta}$  (табл.10.1).

Таблиця 10.1

$\beta_{apr1}$	$\hat{\beta}_1$	$\beta_{apr2}$	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
1	1	1	1	0
-1	0.904	-1	0.904	0.0091
-2	0.857	-2	0.857	0.0091
-3	0.809	-3	0.809	0.036
2	1.048	2	1.048	0.0023
3	1.095	3	1.095	0.0091
1	1.9	-1	0.0015	0.0045
2	2.85	-2	-0.95	0.011
3	3.8	-3	-1.9	0.0226
-1	0.0015	1	1.9	0.0045
-2	-0.95	2	2.85	0.011
-3	-1.9	3	3.8	0.0226

Як впливає з таблиці 10.1 і рис.10.3, оцінки  $\hat{\beta}$  прямують в область близьку до дійсного значення, якщо  $\beta_{apr}$  лежить в першому і третьому квадранті (ближче або далі від  $\beta$  залежно від віддалення  $\beta_{ap}$  від  $\beta$ ). Якщо ж  $\beta_{apr}$  лежить в другому і четвертому квадрантах, оцінки, в результаті мінімізації регуляризованого функціонала (10.121), не відходять далеко від апіорних, знаходячи точку компромісу між зростаючою добавкою  $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{\text{адр}}\|$  і спадним значенням норми  $\|\Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(\beta, t)\|$ . При цьому відношення  $\varepsilon^T \varepsilon$  до  $\|\Delta Y(t)\|$  не перевищує 2,26%. Тобто якість сигнальної ідентифікації достатньо висока, тоді як параметрична ідентифікація взагалі не коректна: у другому квадранті  $\hat{\beta}_2$  навіть йде від  $\beta_{apr2}$  в протилежну від  $\hat{\beta}_2$  сторону, аналогічно в четвертому квадранті  $\hat{\beta}_1$ . У загальному випадку, для  $n$  змінних, функція  $J(\beta)$  може мати декілька «рівняків» мінімальної або навіть нульової крутизни, що ще більше ускладнює завдання

**Приклад 10.2.** На рис. 10.4 наведено фотографію семи режимів зміни руля висоти  $\delta_e$ , кута атаки  $\alpha(t)$  і кутової швидкості  $\omega_{z_1}(t)$  літака М-17 в короткоперіодичному повздовжньому русі. Це забезпечує автономність до неврахованої безлічі змінних (боковий рух відсутній, швидкість, висота, конфігурація ЛА і інші змінні практично постійні).

Повна модель залежності  $\dot{\omega}_{z_1}(t)$  від  $\delta_B(t)$ ,  $\alpha(t)$  і  $\omega_{z_1}(t)$  подібна до моделі (10.121). У кожному з семи режимів визначалися зміщені внаслідок наближеності моделі, оцінки коефіцієнтів  $\hat{\beta}_j, j=1,2,3$ . По ним розраховувався конкретний фізичний параметр: нормована по середній аеродинамічній хорді крила відстань між центром мас і аеродинамічним фокусом літака, тобто запас  $\hat{\sigma}_n$  аперіодичної стійкості по вертикальному перевантаженню.

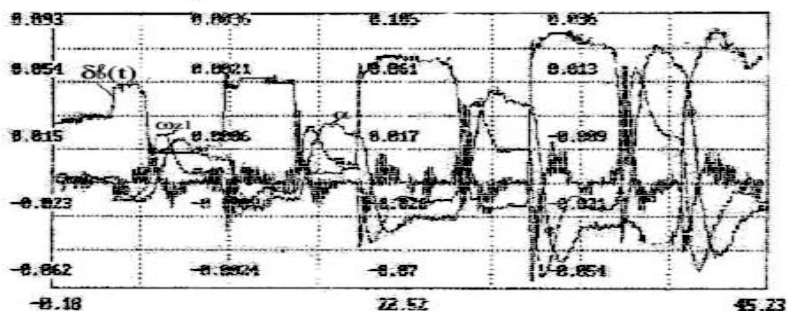


Рис. 10.4. Осцилограми режимів зміни керма висоти, кута атаки і кутової швидкості

Далі запас апроксимувався лінійною залежністю у функції  $\|\Delta\alpha\|$  (Рис. 10.5):

$$\hat{\sigma}(\|\Delta\alpha\|) = 0,22 - 0,075\|\Delta\alpha\|. \quad (10.123)$$

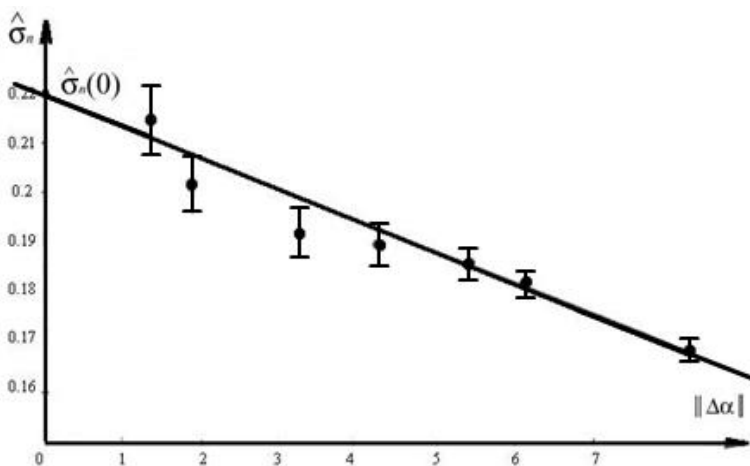


Рис. 10.5. Залежність оцінки  $\hat{\sigma}_n$  від  $\|\alpha\|$ .

Прогнозне в  $\|\Delta\alpha\|=0$  значення  $\hat{\sigma}_n(0)$  лежить в області дійсних значень  $\sigma_n$ . Незміщена оцінка  $\hat{\sigma}_n=0.22$  отримана шляхом лінійної апроксимації залежності (10.123) і розрахунку її значення в точці нульових відхилень. Просте усереднювання результатів дасть істотно зміщену (занижену) оцінку  $\hat{\sigma}_n=0,188$ . Подальше уточнення  $\hat{\sigma}_n$  може бути досягнуте шляхом апроксимації оцінок  $\hat{\sigma}_n(0)$  гладкою регресійною залежністю від інших параметрів польоту (швидкості, висоти і т.д.). Так в таблиці 10.2 приведені лінійні регресійні залежності аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) від початкового значення кута атаки  $\alpha$  і його похідної, яка визначає темп виконання динамічних режимів в короткоперіодичному подовжньому русі літака АН-72. У першому стовпчику таблиці подано відповідні АДК, далі  $a_0, a_1, a_2$  - коефіцієнти регресії, далі середньоквадратична помилка (СКО) апроксимації відповідного АДК, далі середнє значення АДК і його середньоквадратичне відхилення. Як бачимо, урахування тільки регресорів  $\alpha$  і  $\dot{\alpha}$  дозволило в середньому в 2 рази підвищити точність оцінок АДК.

Таблиця 10.2

Залежність оцінок АДК від  $\alpha$  і  $\dot{\alpha}$ 

АД К	$a_0$	$a_1$	$a_2$	СК О апр.	Серед не	СК О сер.
$m_z^{\bar{\omega}_z}$	- 8.54	- 0.2289	- 0.0112	0.0 1	-10.61	<b>0.0</b> <b>2</b>
$m_z^\alpha$	- 0.0092	0	0	0.0 07	- 0.0091	<b>0.0</b> <b>07</b>
$m_z^{\delta_\theta}$	- 0.0161	- 0.0012	0	0.0 03	-0.02	<b>0.0</b> <b>09</b>
$m_z^{C_y}$	- 0.0873	- 0.0029	0	0.0 04	- 0.0928	<b>0.0</b> <b>06</b>
$C_y^\alpha$	0.10 68	- 0.003	0	0.0 01	0.097 9	<b>0.0</b> <b>03</b>
$C_y^{\delta_\theta}$	- 0.01	0.00 12	0.00 01	0.4 31	0.002 8	<b>0.9</b> <b>23</b>
$\sigma_n$	- 0.2301	0.00 71	0.00 01	0.0 01	- 0.2119	<b>0.0</b> <b>02</b>

У таблиці 10.3 приведені узагальнені для різних типів літаків дані, підтверджуючі ефективність уточнення, зокрема, запасу стійкості  $\sigma_n$ . шляхом апроксимації лінійною регресивною залежністю від різних параметрів  $\Delta X$  польоту. Для різних ЛА розмірність  $\Delta X$  мінялася від 2 до 6 і число режимів від 15 до 190.

Таким чином, для коректності постановки задачі ідентифікації слід розрізняти **сигнальний** і **параметричний** підходи. Спільність їх полягає в мінімізації  $\varepsilon^T \varepsilon$ , відмінність – в моделях (абстрактною і «фізично» адекватною) і вимогам до функціонала  $\varepsilon^T \varepsilon$ , як функції оцінки  $\hat{\beta}$  (відповідно нестрога і строга випуклсть).

На жаль, в практиці льотних випробувань ЛА іноді користуються для оцінювання параметрів **сигнальною**

ідентифікацією, закладаючи в модель апіорі не об'єктивні неточні (за розрахунком або результатами продувань в аеродинамічній

Таблиця 10.3

**Порівняння простого усереднювання з регресивною  
апроксимацією  $\sigma_n$  від параметрів польоту**

№ п/п	Тип літак a	СКО %		Розмірніс ть $\Delta X$	Число режи мів
		Модел i	Середн є		
1	АН-72	5	102	6	190
2	ИЛ-86	7	31	2	25
3	Ту-154	4	13	4	70
4	Миг-29	7	50	4	50
5	М-17	0.5	1.5	2	15

трубі) коефіцієнти з подальшим «підстроюванням» їх з умови мінімуму функціонала (10.121). При цьому досягається удавана адекватність моделі об'єкту: помилка  $\varepsilon$  достатньо мала, оцінки  $\hat{\beta}$  близькі до апіорних. Але останні можуть істотно відрізнятися від дійсних фізичних параметрів, що згодом може привести до зниження безпеки польотів із-за невірної оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів ЛА, що визначають їх стійкість і керованість.

### 10.5 Ідентифікація гладкої нелінійної статичної складової динамічної моделі (балансировочні залежності латака)

Для реально обмежених швидкостей  $\dot{X}^*(t)$  і змінних  $X^*(t)$  та гладких статичних нелінійностей  $f(U)$  для і-ої складової  $x_i^*(t)$  вектор-функції  $X^*(t)$  з точністю до  $\varepsilon^*(t)$  динаміка процесу  $x_i(U(t))$  може бути представлена у вигляді моделі Гаммерштейна (1):

$$a_n \frac{d^n x_i^*}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i^*}{dt^{n-1}} + \dots + x_i^*(t) = f[U^*(t)], \quad (10.124)$$

де  $a_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  і  $f(U^*)$  невідомі.

Завдання полягає у визначенні статичної нелінійної залежності

$$x_i^*(t) = f(U^*) \quad (10.125)$$

при невідомих  $a_j$  з довільного динамічного режиму зміни  $X^*(t)$  в обмеженій  $G$ -області [4].

Довільність режиму не гарантує лінійної незалежності змінних при  $a_j$  і, як наслідок, невиродженості інформаційної матриці  $X^T X$ . Ще більша некоректність виникає у традиційному підході при апроксимації  $f(U)$  степеневим поліномом від  $U$

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l U^l, \quad (10.126)$$

або системою інших квазіортогональних функцій  $\varphi_l(U)$

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(U), \quad (10.127)$$

коли з рівняння (10.124), представленому у вигляді

$$\varepsilon(t) = x_i(t) - \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l[U(t)] + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j x_i(t)}{dt^j} \quad (10.128)$$

при неточних  $x_i(t)$ ,  $U(t)$  та їх похідних необхідно визначити  $m+n$  невідомих, де числа  $m$  і  $n$  також невідомі. Нехай, наприклад, в (10.124) лінійно незалежні тільки перша і друга похідні від  $x^*(t)$ . Тоді для подолання цієї проблеми скористаємося апріорі відомою властивістю гладкості залежності  $f(U)$ . Будемо оцінювати коефіцієнти  $a_j$  рівняння (10.123) не з умови мінімуму середнього квадрата помилки (10.128), а з умови гладкості залежності  $f(U)$ :

$$(a_1, a_2) = \arg \min_{(a_1, a_2)} \sum_{k=1}^N \left( \frac{d^r x_{\text{ск}}(t_k)}{dU^r} \right)^2, \quad (10.129)$$

де  $r$  характеризує ступінь гладкості  $f(U)$ ; тоді скомпенсоване по динаміці значення  $x(t_k)$  дорівнюватиме:

$$x_{\text{ск}}(t_k) = x(t_k) - a_1 \frac{dx(t_k)}{dt} - a_1 \frac{d^2 x(t_k)}{dt^2} \quad (10.130)$$

Практично в (10.129) замість похідних беруться кінцеві різниці відповідного порядку, які обчислюються за попередньо згладженим за допомогою сплайнів і впорядкованим за зростанням  $U$  масивом даних.

**Приклад 10.3.** Як  $f(U)$  взята залежність (рис.10.6)

$$f(U) = 4U - 60 \sin(0,065U). \quad (10.131)$$

Вхідний вплив  $U(t)$  - послідовність сходинок:

$$U(t) = U_{\max} \left[ -1 + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{16} 1(t - k\Delta t) \right].$$

На  $x^*(t)$  накладено 20% «білий шум». Результат спільного МНК-оцінювання коефіцієнтів  $b_i$  та  $a_1, a_2$  моделі (10.128) для  $n = 2$ ,  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  наведено на рис. 10.6.



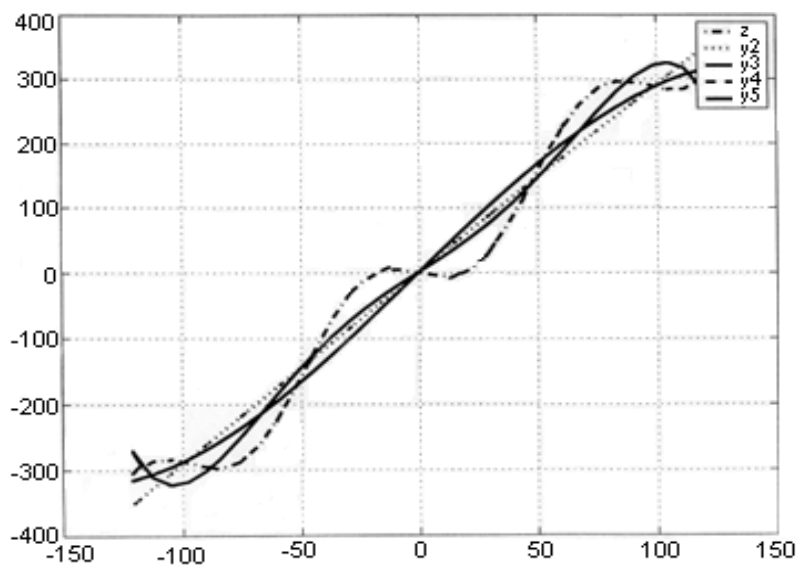


Рис. 10.6.

Очевидно, збільшення  $m$  не призвело до відновлення моделі (10.131). Результат непараметричного оцінювання нелінійності (10.131) із умови (10.129) гладкості  $f(U)$  при  $r = 1, 2, 3$  наведено на рис. 10.7.

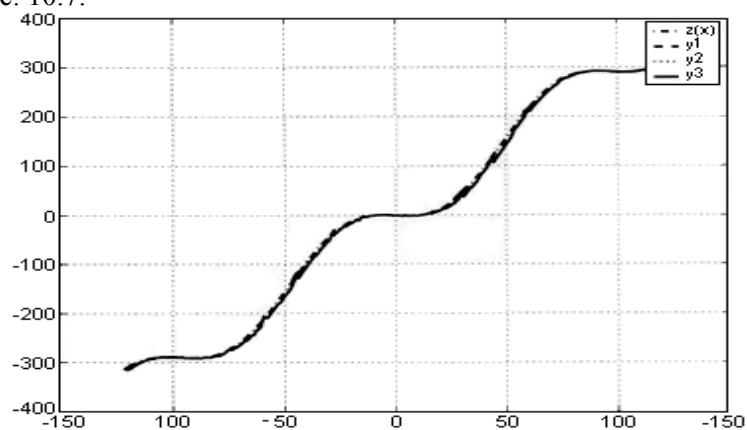


Рис. 10.7.

Як впливає із зіставлення графіків на рисунках, непараметрична оцінка  $\hat{f}(U)$  з корекцією динаміки із умови (10.129) істотно ближче до істинної  $f(U)$ , ніж параметрична МНК-оцінка при спільному оцінюванні коефіцієнтів лінійної та нелінійної частини моделі (10.124).

**Приклад 10.4.** На рис.10.8 приведена одна з балансировочних залежностей для літака М-17, отримана з динамічних режимів з умови (10.129) (лінія (1)) і апроксимована прямою (2), а також ламана (3), впорядкована по  $N_y$  залежність, побудована без компенсації динаміки

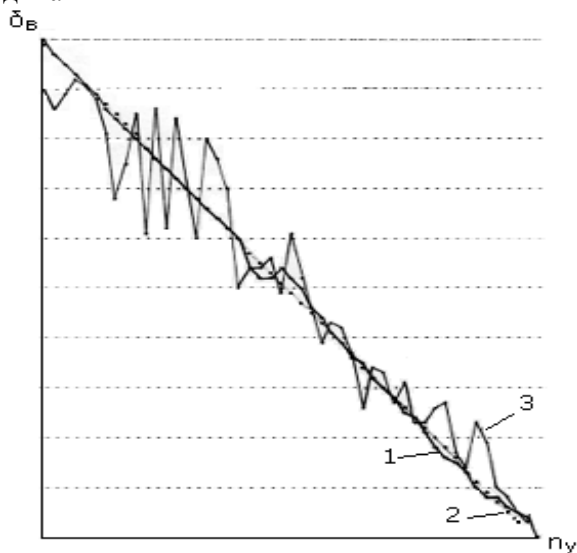


Рис. 10.8. Графік балансування залежностей  $\delta_B(n_y)$

Таким чином, можна спочатку виявити і оцінити нелінійність, а потім, якщо режим досить динамічний, коректно оцінити лінійну динамічну частину моделі (10.29).

## 10.6 Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних залежностей за експериментальними даними

Відсутність інформації про структуру нелінійної багатовимірної залежності  $y(x_1, \dots, x_n)$  не дає можливості застосувати методику оптимального планування експерименту. Як правило, знімаються часткові перерізу  $y(x_i)$  при постійних  $x_j$  ( $j = \overline{1, n-1}, j \neq i$ ). Скориставшись основоположним властивістю гладкості  $y(x)$ , подамо цю залежність кратним рядом Тейлора або його степеневим еквівалентом:

$$y(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \dots \quad (10.123)$$

Для часткового  $k$ -го перерізу при  $x_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, n-1}, i \neq k$ , з (10.123) отримаємо одновимірну залежність

$$y(x_k) = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_k + \beta_{2k} x_k^2 + \dots \quad (10.133)$$

Структура залежності (10.133) і параметри  $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \dots$  знаходиться за МНК для (10.133) при різних, але фіксованих значеннях інших змінних. Далі коефіцієнти часткових моделей послідовно апроксимуються як функції цих змінних.

**Приклад 10.5.** Як приклад, розглянемо висотно-швидкісні характеристики турбогвинтового авіадвигуна AI-20M (залежність тяги  $y$  від висоти  $x_1$ , швидкості  $x_2$  та керуючого впливу  $x_3$ ).

Математична модель (неперервні лінії) отримана з локальних моделей перерізів  $y(x_k)$  при  $x_1 = c_i, x_2 = c_j$ :

$$y(x_3) = \beta_0'' + \beta_1'' x_3 \quad (10.134)$$

шляхом МНК-апроксимації її коефіцієнтів квадратичною моделлю по  $x_1$ :

$$\beta_0'' = \beta_{01}' x_2 + \beta_{02}', \quad \beta_1'' = \beta_{11}' x_2 + \beta_{12}'. \quad (10.135)$$

і подальшої апроксимації статистично значущих коефіцієнтів моделей (10.135) квадратичною моделлю по  $x_1$ :

$$\beta'_i = \beta_{i0} + \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2, i = 0,1. \quad (10.136)$$

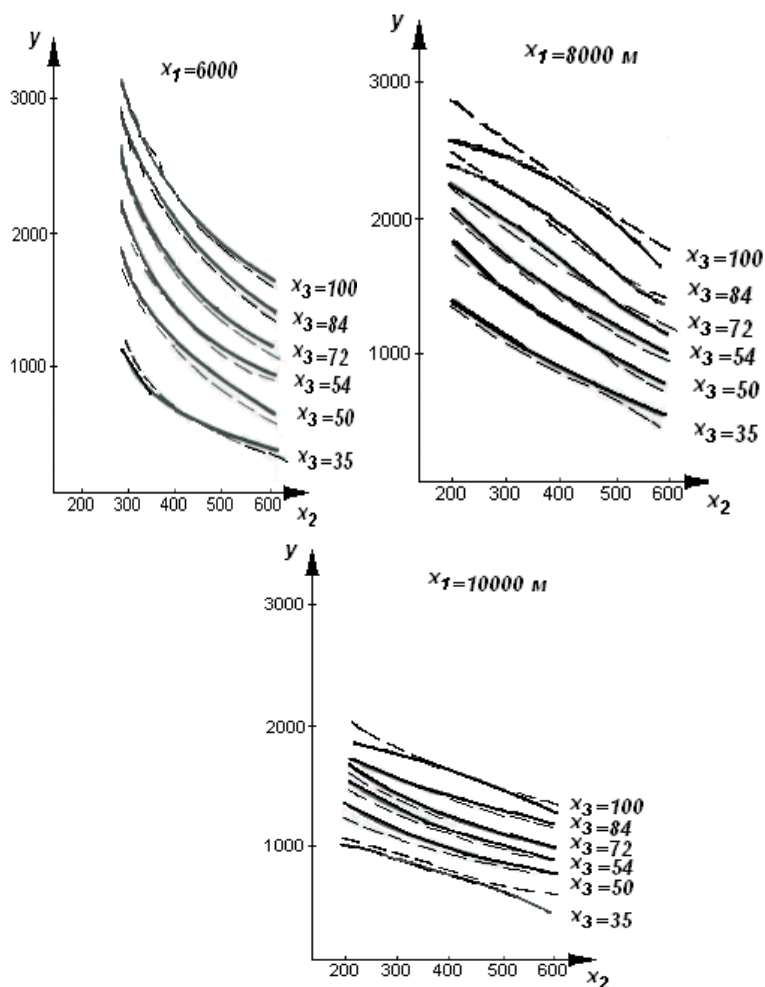


Рис. 10.9. Характеристики авіадвигуна AI-20M

У результаті, повна модель набуває вигляду

$$y = (\beta_0 + \beta_{01}x_1 + \beta_{02}x_1^2) + (\beta_1 + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_1^2)x_2 + (\beta_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_1^2)x_3 + \\ + (\beta_3 + \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_1^2)x_2x_3 + (\beta_4 + \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_1^2)x_2^2. \quad (10.136)$$

Практично збіглися (рис. 10.10) продувні в аеродинамічній трубі дані з моделлю для аеродинамічної поправки у у функції кута атаки  $x_1$  і положення закриток  $x_2$  літака ТУ-144.

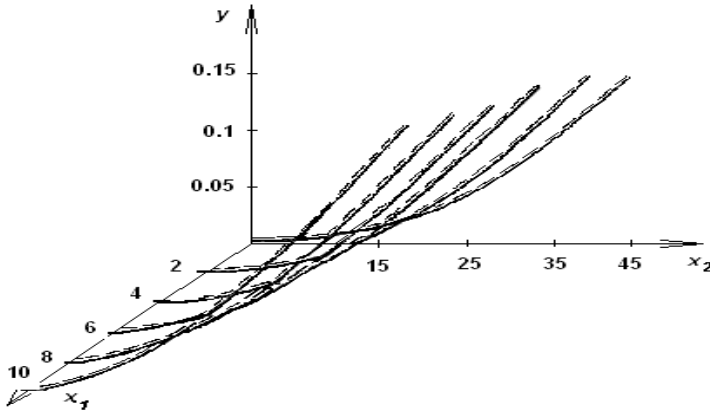


Рис. 10.10. Залежність  $Y(x_1, x_2)$  ТУ-144.

Тут з локальних моделей

$$y(x_2) = \beta'_{i1}x_2 + \beta'_{i2}x_2^2, \quad x_1 = \text{const}, i = \overline{1, 6} \quad (10.137)$$

лінійною по  $x_1$  апроксимацією коефіцієнтів моделі (10.137)

$$\beta''_{i1}(x_1) = \beta_1 + \beta_2x_1; \quad \beta''_{i2}(x_1) = \beta_3 + \beta_4x_1 \quad (10.138)$$

отримана повна модель

$$y = \beta_1x_2 + \beta_2x_1x_2 + \beta_3x_2^2 + \beta_4x_1x_2^2. \quad (10.139)$$

Максимальна помилка апроксимації склала 2% від  $y_{\max}$ .

Залежність  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , (рис.10.11) отримана аналогічним шляхом.

$$Y(\beta_1) = \alpha_{1ik} \beta_1 + \alpha_{2ik} \beta_1^2, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3; \quad (10.140)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha'_{jk} \beta_2 + \alpha''_{jk} \beta_2^2, \quad j = 1, 2; \quad (10.141)$$

$$\alpha_{jk}^{(1)}(\beta_3) = \alpha'_j \beta_3 + \alpha''_j \beta_3^2. \quad (10.142)$$

Після підстановки коефіцієнтів (10.142) в (10.143), а (10.143) в (10.140) отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.96 \cdot 10^{-6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + \\ & + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.24 \cdot 10^{-4} \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 + \\ & + 0.46 \cdot 10^{-5} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (10.143)$$

Похибка апроксимації не перевищує 0.5% від максимального значення  $J$ .

У разі, якщо допустима похибка складає 5% вираз (20) суттєво спрощується:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + \\ & + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (10.144)$$

Як бачимо з прикладів, даний алгоритм дає можливість досить просто визначити структуру і параметри складних багатомірних нелінійних залежностей, поданих таблично за результатами натурних експериментів.

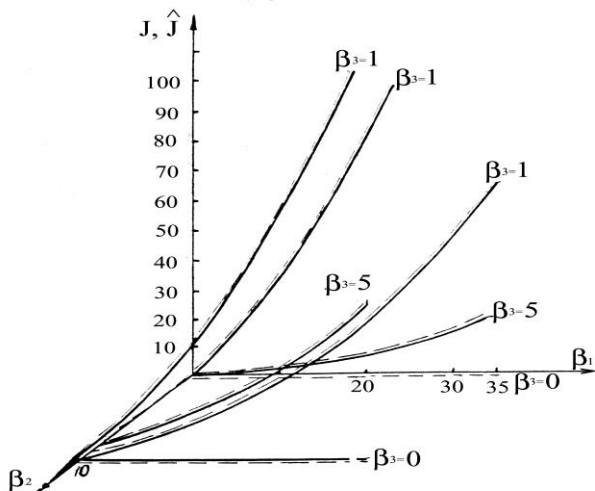


Рис.10.11. Залежність  $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  та її модель  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .

*Література до розділу:*

1. Кринецкий Л.И. Летные испытания систем управления ракет. М.: Машиностроение, 1980.
2. Сільвестров А.М., Синеглазов В.М., Спинул Л.Ю. Дві стратегії ідентифікації реальних об'єктів// В. сб. «Електроніка та системи управління», №1(15), 2008, К.: с. 129-137.
3. Сільвестров А.М., Синеглазов В.М. Ідентифікація статистичних і динамічних характеристик реальних об'єктів// В.сб. «Електроніка та системи управління». К.: НАУ, 2006, №4.
4. Патент 30530, Україна МПК 05В 13/60. Спосіб визначення гладкої статистичної нелінійності з динаміки об'єкта контролю/ А.М. Сільвестров, Лисиця П.М., Галай П.М.-NU 200713 від 25.02 2008р.

## Розділ 11. Адаптивна активна ідентифікація математичної моделі бічного руху ЛА

### 11.1. Структурна схема бортової системи адаптивного оптимального управління льотними випробуваннями на стійкість і керованість

Літальні апарати є складною динамічною системою, остаточне доведення якої можливе тільки за результатами випробувань в польоті. Ефективне управління льотним експериментом можливе лише при високому ступені його автоматизації. У термінах загальної теорії систем будемо вважати, що є об'єкт, вимірювальний пристрій і пристрій управління (рис. 11.1).

Недоліком відомих алгоритмів управління є слабе використання достовірної інформації про поточну динаміку системи. Застосування принципів адаптації та ідентифікації в системі управління має суттєво збільшити ефективність її функціонування.

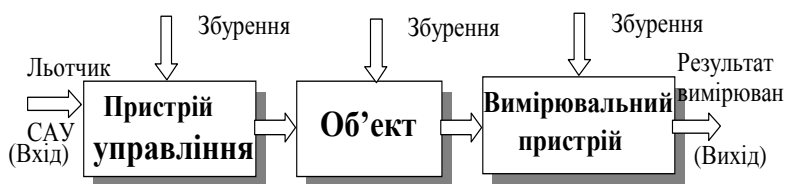


Рис. 11.1. Структурна схема системи

Система (рис. 11.2) складається з наступних компонент: вимірювально-інформаційна система; бортова обчислювальна система; апаратура сполучення.

До складу інформаційно-вимірювальної системи входить контрольно-вимірювальна апаратура наступних систем:

- система метеовимірів, забезпечує необхідною інформацією про стан зовнішнього середовища та режиму польоту (швидкість  $V$ , висота  $H$ , швидкісний натиск  $q$  і ін);
- інерційно-навігаційна система, що забезпечує інформацією про кутові швидкості ЛА, кути атаки і ковзання, перевантаження;
- система бортових вимірювань, що повідомляє про витрату палива, кути відхилення органів управління;



– система відображення для повідомлення льотчику відомостей про кондиційність одержуваного в ході експерименту матеріалу, про оптимальні умови проведення експерименту (інформацію про оптимальне керування ЛА).

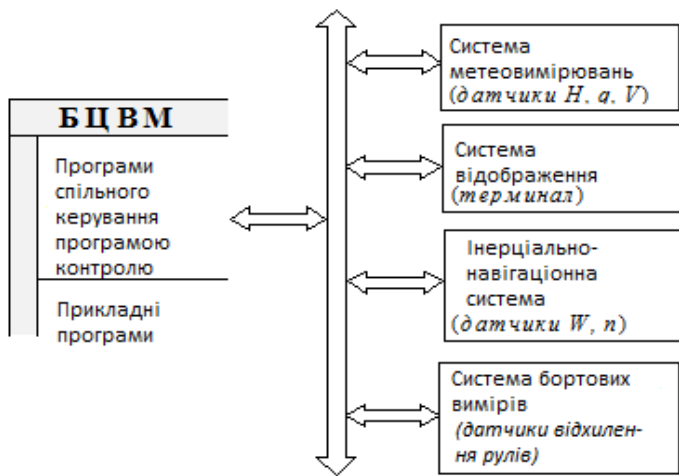


Рис. 11.2. Складові частини

Бортова обчислювальна система забезпечує:

- аналіз кондиційності одержуваного в ході льотного експерименту матеріалу;
- індикацію льотчику всієї необхідної для якісного проведення експерименту інформації;
- обробку експериментального матеріалу;
- зберігання результатів експерименту;
- облік накопиченої інформації про модель об'єкта при плануванні наступного експерименту.

Апаратура сполучення забезпечує циркуляцію інформаційних потоків в системі. Система (рис. 11.3) функціонує наступним чином:

1. Задаються параметри апріорної моделі і вимоги до точності ідентифікації, необхідні для синтезу оптимальних тестових сигналів.

2. Посилаючись на свідчення бортової системи вимірювань та

системи метеовимірів, задаються дані для синтезу тестових сигналів та ідентифікації моделі стосовно конкретного експерименту (швидкість  $V$ , висота  $H$ , швидкісний натиск  $q$ ). У залежності від витрати палива уточнюються моменти інерції ЛА. Задаються значення кута атаки, на яких буде проводитися експеримент.

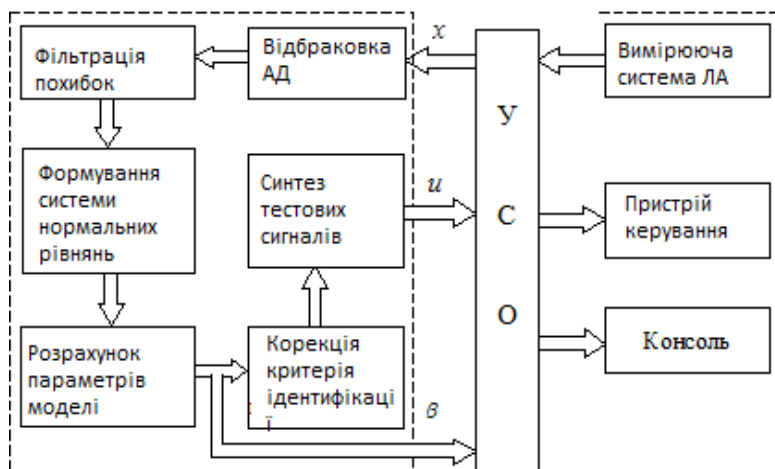


Рис. 11.3. Функціональна схема

3. За критеріями, що визначають точність ідентифікації параметрів, синтезуються оптимальні тестові сигнали.

4. За допомогою системи відображення льотчику повідомляються необхідні для проведення експерименту дані.

5. Проводиться експеримент з первинною обробкою матеріалу по ходу його надходження. Первинна обробка включає в себе відбраковування аномальних даних і фільтрацію перешкод вимірювань. З відфільтрованих даних рекурентно формується система нормальних рівнянь.

6. По закінченню експерименту обчислюються параметри моделі шляхом рішення системи нормальних рівнянь.

7. Приймається рішення про кондиційність експериментального матеріалу і про досягнення необхідної точності визначення

параметрів. В іншому випадку перехід до п. 2.

## 11.2. Математичні моделі збуреного руху ЛА і їх декомпозиція

Якщо розглядати ЛА як тверде тіло постійної маси з площиною симетрії ОХУ, то в зв'язаній системі координат рівняння його руху в просторі мають вигляд:

$$m(\dot{V}_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x) = z + mg \cos \vartheta \sin \gamma, \quad (11.1)$$

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + I_{xy} (\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) = M_x, \quad (11.2)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x - I_{xy} (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) = M_y, \quad (11.3)$$

$$m(\dot{V}_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y) = P_x - x + mg \sin \vartheta, \quad (11.4)$$

$$m(\dot{V}_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z) = P_y - y_{aep} - mg \cos \vartheta, \quad (11.5)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y - I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) = M_z aep + M_{z\phi}, \quad (11.6)$$

де  $I_x, I_y, I_z$  - осьові,  $I_{xy}$  - відцентровий моменти інерції;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - кутові швидкості крену, ристання і тангажу;  $m$  - маса ЛА;  $\vartheta, \gamma$  - кути крену і тангажу;  $V_x, V_y, V_z$  - складові вектора швидкості ЛА;  $x$  - лобовий опір;  $y_{aep}$  - підйомна сила;  $P_x, P_y$  - складові вектора тяги;  $M_{z\text{дв}}$  - гіроскопічний момент двигуна;  $z$  - поперечна сила;  $M_x, M_y, M_z$  - аеродинамічні моменти щодо відповідних осей.

Вирази (11.1) – (11.6) являють собою систему нелінійних диференціальних рівнянь. Для отримання рівнянь, що дозволяють вирішити задачу ідентифікації стійкості і керованості ЛА, скористаємося принципом лінеаризації рівнянь руху за допомогою методу малих збурень. У відповідності з цим методом будемо вважати, що кінематичні параметри збуреного руху ЛА мало відрізняються від параметрів опорного руху в одні і ті ж моменти часу. Нелінійні залежності за допомогою розкладання в ряд Тейлора можна наближено представити у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь, яка описує збурений рух ЛА як

відхилення від опорного руху.

Умова малості відхилення  $\Delta x$  кінематичних параметрів дозволяє вважати, що  $\cos \Delta x \approx 1$ ;  $\sin \Delta x \approx \Delta x$ ;  $\Delta x = \{\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma\}$ .

У рівняння (11.1) - (11.6) входять аеродинамічні сили і моменти:

$$x = c_x q S; \quad y = c_y q S; \quad z = c_z q S; \quad (11.7)$$

$$M_x = m_x(\alpha) q S l; \quad M_y = m_y(\alpha) q S l; \quad M_z = m_z(\alpha) q S b_A, \quad (11.8)$$

де  $q$  - швидкісний напір;  $S$  - площа крила;  $l$  - розмах крила;  $b_A$  - середня аеродинамічна хорда крила.

У загальному випадку коефіцієнти аеродинамічних сил і моментів є функцією кута атаки  $\alpha_0$ . Вибираючи в якості опорного руху режими з фіксованими кутами атаки  $\alpha_0$ , можна вважати, що коефіцієнти  $c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$  стаціонарні. Вважаємо

$$\omega_x^0 = \omega_y^0 = \omega_z^0 = 0.$$

Покладемо також, що бічний рух і поздовжнє рух не надають взаємного впливу один на одного. Для цього маневр в бічному русі виконується при майже постійному  $\alpha$ , а в поздовжньому - при нульових відхиленнях змінних бокового руху.

Ізольований бічний рух (БР) можливий за наступних обмежень, які доповнюють наведені вище  $\Delta \omega_z = 0$ ;  $V = \text{const}$ ;  $\sin \Delta \beta \approx \beta$ ;  $\cos \Delta \beta \approx 1$ , де  $\beta$  - кут ковзання ЛА. З огляду на ці обмеження і використовуючи співвідношення

$$V_x = V \cos \beta \cos \alpha; \quad V_y = -V \cos \beta \sin \alpha; \quad V_z = V \sin \beta, \quad (11.1) \quad - \quad (11.3)$$

отримаємо:

$$\dot{\beta} = \cos \alpha \omega_y + \sin \alpha \omega_z + \frac{z}{mV}, \quad (11.9)$$

$$I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y = M_x, \quad (11.10)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x = M_y, \quad (11.11)$$

де  $\frac{z}{mV}$  - наведена поперечна сила:

$$\frac{z}{mV} = \frac{z_{aэp} + mg \cos \vartheta \sin \gamma}{mV} = \frac{g}{V} n_z + \frac{g}{V} \cos \vartheta \sin \gamma \quad (11.12)$$

де  $n_z$  - бічне перевантаження.

$$\Delta c_z = c_z^\beta \Delta \beta + c_z^{\delta H} \Delta \delta_H + c_z^{\delta \vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \quad (11.13)$$

$$m_x = m_x^{\bar{\omega}_x} \Delta \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \Delta \bar{\omega}_y + \\ + m_x^\beta \Delta \beta + m_x^{\delta H} \Delta \delta_H + m_x^{\delta \vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \quad (11.14)$$

$$m_y = m_y^{\bar{\omega}_x} \Delta \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \Delta \bar{\omega}_y + m_y^\beta \Delta \beta + \\ + m_y^{\delta H} \Delta \delta_H + m_y^{\delta \vartheta} \Delta \delta_\vartheta. \quad (11.15)$$

З огляду на це, а також те, що поперечне перевантаження дорівнює  $n_z = c_z \frac{qS}{mg}$ , із (11.10) - (11.12) отримаємо:

$$\left( I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y \right) \frac{1}{qSl} = m_x^{\bar{\omega}_x} \Delta \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \Delta \bar{\omega}_y + \\ + m_x^\beta \Delta \beta + m_x^{\delta H} \Delta \delta_H + m_x^{\delta \vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \quad (11.16)$$

$$\left( I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x \right) \frac{1}{qSl} = m_y^{\bar{\omega}_x} \Delta \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \Delta \bar{\omega}_y + \\ + m_y^\beta \Delta \beta + m_y^{\delta H} \Delta \delta_H + m_y^{\delta \vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \quad (11.17)$$

$$\Delta n_z \frac{mg}{qS} = c_z^\beta \Delta \beta + c_z^{\delta H} \Delta \delta_H + c_z^{\delta \vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \quad (11.18)$$

де  $\delta_H$ ,  $\delta_\vartheta$  - кути відхилення керма напрямку і елеронів;  
 $\bar{\omega}_{x,y} = \frac{l}{2V} \omega_{x,y}$  - безрозмірні кутові швидкості крену і ристання.

### 11.3. Синтез тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі бічного руху ЛА

Проблема мультиколленіарності змінних одна з найважливіших при ідентифікації похідних стійкості і керованості. Майже лінійна залежність фазових змінних ЛА змушує шукати такі умови експерименту, при яких ця залежність проявляється в найменшій мірі. Вирішення цієї проблеми пов'язано з вибором таких тест-сигналів, щоб інформаційна матриця експерименту мала певну структуру.

Однією з особливостей реалізації тест-сигналів на борту ЛА є те, що вони можуть вироблятися як за допомогою САУ, так і в директорному режимі. Останнє більш ймовірно на етапі льотних випробувань. Це накладає додаткові (з урахуванням розглянутих в розділі 2) обмеження на клас допустимих управлінь:

1. Прийнятність для пілота. Вхідні сигнали не повинні виводити ЛА в область польотних режимів, з яких пілот не в змозі вивести ЛА. Сигнали мають бути відтворені пілотом.

2. Обмеження, що накладаються на міцність конструкції ЛА: маневри, що здійснюються ЛА і модельовані за допомогою вхідних сигналів, не повинні приводити до навантажень, які перевищували б допустимі.

Форма тест-сигналу керма управління наведена на рис. 11.4.

$$\dot{\beta} = \cos \alpha \omega_y + \sin \alpha \omega_z + \frac{z}{mV},$$

$$I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y = M_x,$$

$$I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x = M_y,$$

Тестові сигнали не повинні створювати надмірних прискорень і істотно змінювати положення ЛА, з метою збереження припущень щодо лінеаризації. Для моделі легкого маневреного ЛА вводилися наступні обмеження:

$$|\Delta \beta| \leq 14^\circ, \quad |\Delta \omega_x| \leq 10 \text{ град} / \text{сек}, \quad |\Delta \omega_z| \leq 6 \text{ град} / \text{сек}$$

Для успішної відтворюваності сигналів пілотом накладаються обмеження на їх взаємне розташування:

$$t_j^i - t_l^k \geq \Delta t \in \Delta T_c; \quad i, k = 1, 2, \quad j \in L_j, \quad l \in L_l.$$

$$t_k - t_1' \leq T_{\text{эксн}};$$

Остання нерівність пов'язана з обмеженням на тривалість експерименту.

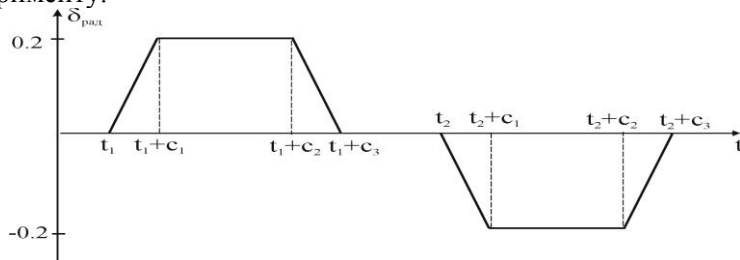


Рис. 11.4. Тестові сигнали для ідентифікації каналу бічного руху ЛА

Момент подачі першого імпульсу  $[+\delta_H]$  фіксований. Моменти подачі інших імпульсів  $[\pm\delta_H, -\delta_H]$  задаються відносно першого. На рисунку 11.5. показано тест-сигнали, оптимальні за критерієм:  $\Phi = \max \det M$ , де  $M$  - інформаційна матриця експерименту. Оцінки для оптимального за цим критерієм і управління наведено в таблиці 11.1.

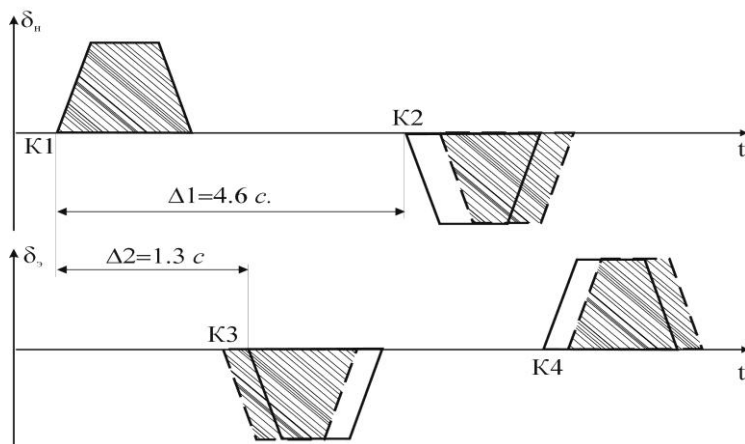


Рис. 11.5. Уточнення тестових сигналів за даними експерименту.

Таблиця. 11.1.

Ідентифікація за $\Phi$ - критерієм					
Параметри	$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_x^{\bar{\omega}_y}$	$m_x^{\beta}$	$m_x^{\delta_H}$	$m_x^{\delta_{\Theta}}$
	-0,36204	-0,07159	-0,07655	-0,00516	-0,05501
	$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	$m_y^{\beta}$	$m_y^{\delta_H}$	$m_y^{\delta_{\Theta}}$
	-0,36204	-0,07159	-0,07655	-0,00516	-0,05501
	—	—	$c_z^{\beta}$	$c_z^{\delta_H}$	$c_x^{\delta_{\Theta}}$
	—	—	1,02887	-0,6232	0,00194

#### 11.4. Корекція критеріїв якості експерименту

Необхідна для побудови цілеорієнтованої моделі матриця других похідних критерію верхнього рівня  $I(\beta)$  в даному випадку задається діагональною матрицею  $I''(\beta) = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ , де величини  $a_i$  визначаються необхідною точністю оцінки параметрів. Оскільки задача ідентифікації параметрів моделі ЛА є погано обумовленою, то домогтися в одному експерименті необхідної точності для всіх оцінок параметрів не вдається. Для подолання цих труднощів використовується алгоритм покоординатної оптимізації. Критерій покоординатної оптимізації для оцінки  $k$ -ого параметра при використанні норми Гельдера має вигляд:

$$\Phi_k^p = \min_j \|j_k - i_k\|_p = \min \left( \sum_{i=1}^m |j_{kl} - i_{kl}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (11.19)$$

де  $j_{kl}$ ,  $i_{kl}$  - елементи  $k$ -го рядка матриць  $J_{\gg}(\beta)$  і  $I_{\gg}(\beta)$  відповідно,  $p$  - показник норми.

Оскільки матриця для  $I(\beta)$  діагональна, то критерій (11.9) приймає вигляд:



$$\Phi_k^p = \min \left( \sum_{l=1}^{m-1} |j_{kl}|^p + |j_{kk} - a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (11.20)$$

При використанні норми с показником  $p = 1$  можна вираз (11.20) ще спростити:

$$\Phi_k = \min \left( \sum_{i=1}^m |j_{ki}| - a_k \right) \quad (11.21)$$

У таблиці 11.2. наведено результати ідентифікації з використанням алгоритмів покоординатної оптимізації.

Алгоритм корекції критеріїв ідентифікації має вигляд:

– за продувними даними синтезуються тестові сигнали, оптимальні за критерієм  $\Phi = \max \det M$  ;

– для уточнення кожного з параметрів синтезуються тестові сигнали, оптимальні за критерієм покоординатної оптимізації

$$\Phi_k = \min_j \sum_{i=1}^m |j_{ki}|.$$

Таблиця. 11.2.

**Ідентифікація параметрів за критеріями покоординатної оптимізації**

<b>Параметри моделі</b>	$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_x^{\bar{\omega}_y}$	$m_x^{\beta}$	$m_x^{\delta_H}$	$m_x^{\delta_{\Theta}}$
	-0,358	-0,073	-0,0751	-0,00516	-0,055
	$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	$m_y^{\beta}$	$m_y^{\delta_H}$	$m_y^{\delta_{\Theta}}$
	-0,068	-0,037	-0,139	-0,034	0,01012
	—	—	$c_z^{\beta}$	$c_z^{\delta_H}$	$c_x^{\delta_{\Theta}}$
	—	—	1,02911	-0,06271	0,00021

Утабл. 11.3. наведено справжні параметри моделі ЛА(11.13)÷(11.18). Як бачимо, оцінки АДК за критерієм (11.21) ближчі до точних АДК (табл. 11.3), ніж оцінки за критерієм Ф.

Таблиця. 11.3

Справжні параметри системи

$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_x^{\bar{\omega}_y}$	$m_x^{\beta}$	$m_x^{\delta_H}$	$m_x^{\delta_{\mathcal{D}}}$
-0,3500	-0,64631	-0,075	-0,00516	-0,055
$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	$m_y^{\beta}$	$m_y^{\delta_H}$	$m_y^{\delta_{\mathcal{D}}}$
-0,070	-0,42537	-0,140	-0,0344	0,010
————	————	$c_z^{\beta}$	$c_z^{\delta_H}$	$c_z^{\delta_{\mathcal{D}}}$
————	————	1,030	-0,063	0,00

### 11.5. Уточнення оцінок коефіцієнтів моделі бічного руху ЛА

У процесі композиції відновлюється характер залежності коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів від кута атаки, роблячи можливим перехід від лінійних відносно шуканих коефіцієнтів моделей збільшень (11.16) - (11.18) до більш повних моделей, де АДК – функції кута  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \left( I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y \right) \frac{1}{qSl} = m_x^{\bar{\omega}_x}(\alpha) \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y}(\alpha) \bar{\omega}_y + m_x^{\beta}(\alpha) \beta + \\ + m_x^{\delta_H}(\alpha) \delta_H + m_x^{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha) \delta_{\mathcal{D}}; \end{aligned} \quad (11.22)$$

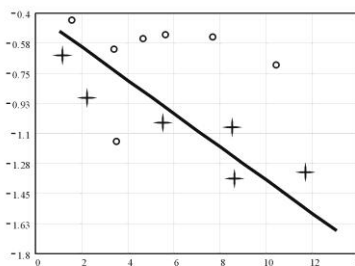
$$\begin{aligned} \left( I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x \right) \frac{1}{qSl} = m_y^{\bar{\omega}_x}(\alpha) \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y}(\alpha) \bar{\omega}_y + m_y^{\beta}(\alpha) \beta + \\ + m_y^{\delta_H}(\alpha) \delta_H + m_y^{\delta_{\mathcal{D}}}(\alpha) \delta_{\mathcal{D}}; \end{aligned} \quad (11.23)$$

$$\Delta n_z \frac{mg}{qS} = c_z^\beta(\alpha) \beta + c_z^{\delta H}(\alpha) \delta_H + c_z^{\delta \mathcal{D}}(\alpha) \delta_{\mathcal{D}}. \quad (11.24)$$

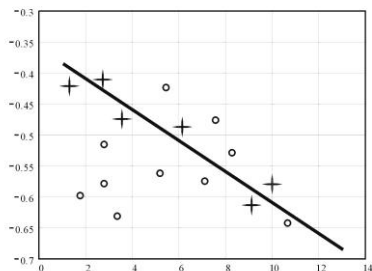
Для невеликого діапазону змін кута атаки легкого маневреного літака характер залежностей досить точно апроксимувався по МНК лінійними моделями:

$$\begin{aligned} m_x^{\bar{\omega}^x}(\alpha) &= -0,64 + 0,024\alpha; & m_y^{\bar{\omega}}(\alpha) &= -0,66; \\ m_x^\beta(\alpha) &= -0,143 + 0,0095\alpha; & m_x^{\delta H}(\alpha) &= -0,068 + 0,0047\alpha; \\ m_x^{\delta \mathcal{D}}(\alpha) &= -0,068 + 0,0027\alpha; & m_y^{\bar{\omega}^x}(\alpha) &= -0,21; \\ m_y^{\bar{\omega}^y}(\alpha) &= -0,565 + 0,064\alpha; & m_y^\beta(\alpha) &= -0,124 + 0,01\alpha; \\ m_y^{\delta H}(\alpha) &= -0,14 + 0,01\alpha; & m_y^{\delta \mathcal{D}}(\alpha) &= -0,018; \\ c_z^\beta(\alpha) &= -1,41 + 0,097\alpha; & c_z^{\delta H}(\alpha) &= -0,36 + 0,025\alpha; \\ c_z^{\delta \mathcal{D}}(\alpha) &= -0,045 + 0,0032\alpha. \end{aligned} \quad (11.25)$$

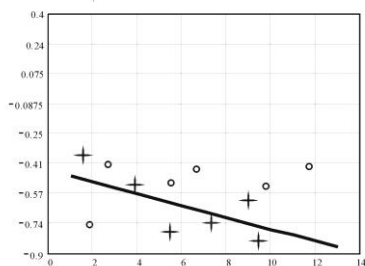
Деякі графіки отриманих залежностей наведені на рисунку 11.6. Там же показані значення оцінок параметрів часткових моделей з використанням як оптимальних, так і неоптимальних вхідних сигналів.



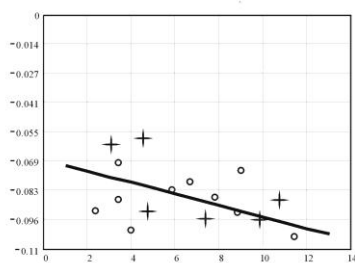
$$C_z^\beta(\alpha) = -1.41 + 0.097\alpha$$



$$C_z^{\delta_H}(\alpha) = -1.41 + 0.097\alpha$$



$$C_z^{\delta_z}(\alpha) = -0.045 + 0.0032\alpha$$



$$C_x^{\delta_x}(\alpha) = -0.068 + 0.0027\alpha$$

Рис. 11.6. Апроксимація залежності аеродинамічних коефіцієнтів від кута атаки: за результатами ідентифікації з використанням оптимальних по критерію (11.21) сигналів (+) (табл.11.2), із використанням D-оптимальних по критерію (табл.11.1) сигналів (°)Ф

Як бачимо, оптимізація тест-сигналів суттєво зменшує розкид точок відносно ліній регресії, а, значить, і розкид оцінок коефіцієнтів. Середньоквадратична міра близькості перехідних процесів моделі і реального об'єкту

$$S = \int_T (x_0 - x_M)^2 dt \quad (11.26)$$

для моделі з коефіцієнтами, отриманими з використанням оптимальних по (11.21) сигналів,  $s=0,87$ ; для моделі з коефіцієнтами, отриманими по  $\Phi$  - критерію  $S=12,4$ . Таким чином, якщо є необхідність у високій точності оцінювання окремих АДК, то доцільно для кожного АДК виконувати режим, оптимальний за критерієм (11.21).

Це задача параметричної ідентифікації. Якщо ж треба забезпечити тільки мінімум критерію (11.26), то достатньо D – оптимального плану експерименту. Це задача сигнальної ідентифікації.

*Контрольні запитання:*

1. Навести структурну схему бортової системи адаптивного оптимального управління льотними випробуваннями.
2. Навести алгоритм синтезу тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі.

3. В чому полягає оптимізація експерименту по D-критерію?
4. Чому точність оцінок АДК по критерію покоординатної оптимізації краща від оптимізації по D-критерію і в чому гірша?
5. Чому залежність (11.25) ФДК від кута  $\alpha$  несиметрична відносно  $\alpha$ .

Література до розділу:

1. Калман Р., Фалб П., Арбіб М. Нариси по математичній теорії систем. М.: Мир, 1971.
2. Кринецький Л.І. Льотні випробування систем управління ракет. М.: Машинобудування, 1980.
3. Круг Г.К., Сосулін Ю.А., Фатуєв В.А. Планування експеримента в ідентифікації і екстарполяції. М.: Наука, 1977.
4. Сільвестров А.М., Синєглазов В.М. Ціленаправлені системи ідентифікації.-К.:УМКВО, 1989. -110с.
5. Сільвестров А.М., Панченко О.М. Багатократно адаптивні системи ідентифікації. К.: «Техніка», 1983.-110с.